Institut Galilée
Filière M1

2020-2021

DISTRIBUTIONS

Jacek Jendrej (CNRS et USPN)
jendrej@math.univ-paris13.fr

(d'après les notes de cours du même titre par prof. Jean-Marc Delort, USPN)

CM II, 09/03/2021

2. Fonctions de classe C^k à support compact.

Définition Soit $u \in C(\Omega)$. On appelle le <u>support</u> de u l'ensemble

$$\operatorname{supp} u := \Omega \cap F \quad \text{où} \quad F := \overline{\{x \in \Omega \,;\, u(x) \neq 0\}} \quad \boxtimes$$

adhérence dans $\mathbb{R}^d$

Comme F est un fermé de $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{supp} u$ est un fermé de Ω. Il est caractérisé par

$$x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u \Leftrightarrow x_0 \in \Omega \text{ et } \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow u(x) = 0.$$

Proposition L'ensemble $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ est le plus grand ouvert sur lequel la fonction u soit nulle.

Démonstration Soit U un ouvert tel que $u(x) = 0$ pour tout $x \in U$, et soit $x_0 \in U$.

On doit mq $U \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow x \in U$ $\Rightarrow u(x) = 0$, donc $x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$.

Cela signifie que $U \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. $\square$

Définition Soit $K \subset \Omega$ un compact, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

On note $C_K^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\, \operatorname{supp} u \subset K\}$

l'espace des fonctions C^k à support inclus dans K.

Remarque On voit que $C_K^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_K^k(\Omega)$.

Définition (semi-normes)

Si $K \subset \Omega$ compact, $k \in \mathbb{N}$ et $u \in C_K^k(\Omega)$, on pose

$$p_K^k(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Exemple : Si $\Omega =]0, 1[$,

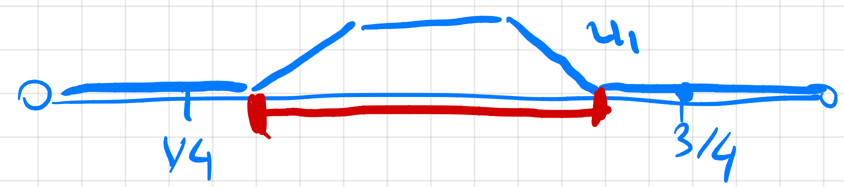
$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, \tfrac{1}{2}[\\ x - \tfrac{1}{2} & \text{si } x \in [\tfrac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

Alors $\operatorname{supp} u = ?$

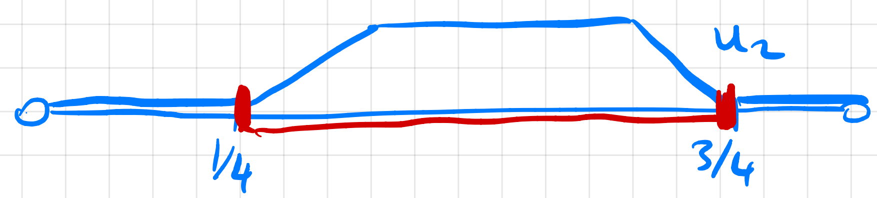
$\{x \in \Omega \,;\, u(x) \neq 0\} =]\tfrac{1}{2}, 1[$

$\operatorname{supp} u = \overline{]\tfrac{1}{2}, 1[} = [\tfrac{1}{2}, 1]$

Exemple : $\Omega =]0, 1[$, $K = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}]$



$u_1 \in C_K^0(\Omega)$



$u_2 \in C_K^0(\Omega)$

Proposition 1) Si $K\subset\Omega$ compact et $k\in\mathbb{N}$, alors $C^k_K(\Omega)$, muni de la norme p^k_K, est un espace de Banach.

2) Si $K\subset\Omega$ compact, alors $C^\infty_K(\Omega)$, muni de la famille des semi-normes $(p^k_K)_k$, est un espace de Fréchet.

Démonstration 1) $C^k_K(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $C^k(\Omega)$, donc il suffit de vérifier que p^k_K induit la même topologie que la famille des semi-normes $(p^k_j)_j$.

Mais d'un côté, il est clair que $p_j^k(u)\geq p_K^k(u)$ si j est tel que $K\subset K_j$.

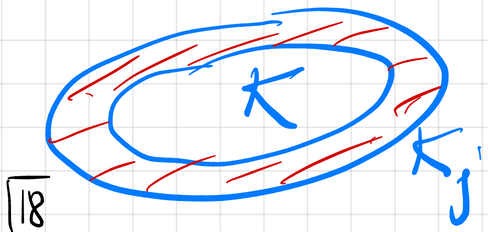
D'un autre côté, $p_j^k(u)\leq p_K^k(u)$ pour tout j, si $\operatorname{supp} u\subset K$.

2) La preuve est similaire, et laissée comme exercice.

Exercice Démontrer la partie 2).

Si $K\subset K_j$ et $u\in C^k_K(\Omega)$, alors $p_j^k(u)=p_K^k(u)$.

car $\sup_{x\in K}|\partial^\alpha u|=\sup_{x\in K_j}|\partial^\alpha u|$.



Rqe $\forall K\subset\Omega$, k

$C^k_K(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^k(\Omega)$.

$u_1, u_2\in C^k_K(\Omega)$,

$a_1, a_2\in\mathbb{C}$

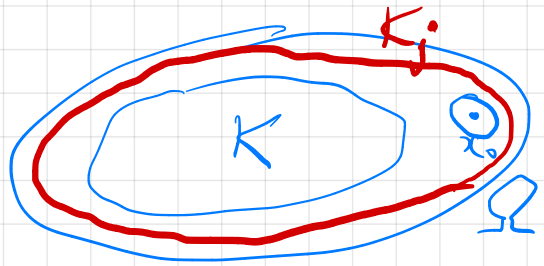
$\Rightarrow a_1u_1+a_2u_2\in C^k_K(\Omega)$.

On montre que $C^k_K(\Omega)\subset C^k(\Omega)$ est fermé.

Soit $u_n\in C^k_K(\Omega)$, $u_n\to u$ dans $C^k(\Omega)$, alors $u\in C^k_K(\Omega)$.

$u_n\to u$ uniformément sur tout compact K_j, où K_j la suite exhaustive.

Si $x_0\notin K$, alors $\exists\,\varepsilon>0$ tq $\{x : |x_0-x|\leq\varepsilon\}\subset\Omega$ et $\{x : |x_0-x|\leq\varepsilon\}\cap K=\emptyset$



Remarque Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et si on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\tilde{u}(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$ et $\tilde{u}(x) = 0$ si $x \notin \Omega$, alors $\tilde{u} \in C^k(\mathbb{R}^d)$. En prolongeant par zéro une fonction de $C^k_K(\Omega)$, on obtient une fonction de $C^k_K(\mathbb{R}^d)$.

Définition Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note

$$C_0^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\, \text{supp } u \text{ est un compact de } \mathbb{R}^d \text{ inclus dans } \Omega\}.$$

On a donc $C_0^k(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset \Omega}} C_K^k(\Omega)$.

Si $k = \infty$, on note aussi $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$. $\boxtimes$

On voit immédiatement que $C_0^k(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque Dans la littérature, on considère souvent $C_0^k(\Omega)$ muni de la "topologie inductive", mais nous n'allons pas le faire ici.

Exemple Trouver une fonction $u \in C_0^1(\mathbb{R})$ qui est quadratique par morceaux.

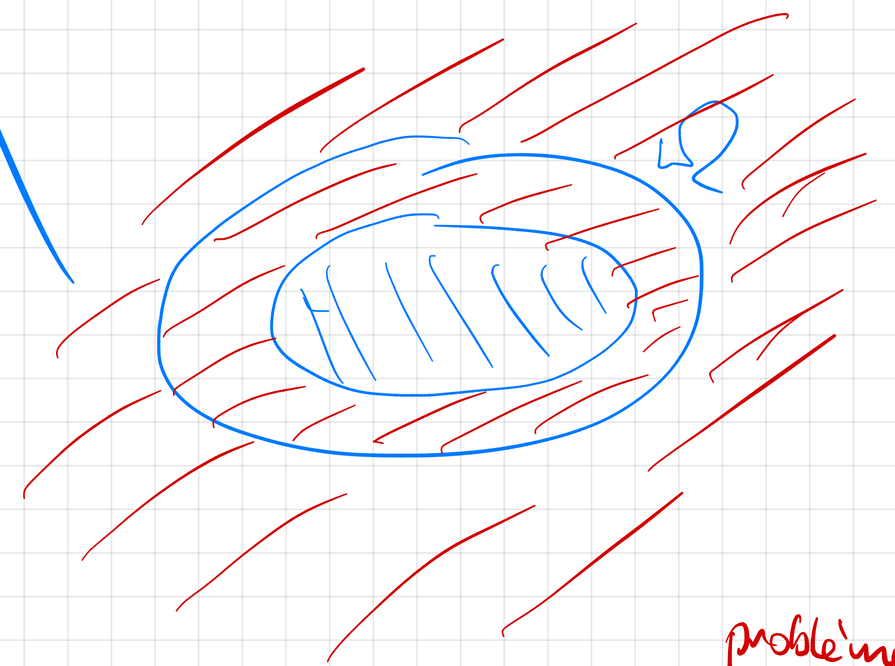
Il existe j tq $\{x : |x_0 - x| \le \varepsilon\} \subset \mathring{K}_j$.

On a $u_n = 0$ sur $\{x : |x_0 - x| \le \varepsilon\}$

$\Longrightarrow$ $u = 0$ sur $\{x : |x_0 - x| \le \varepsilon\}$.

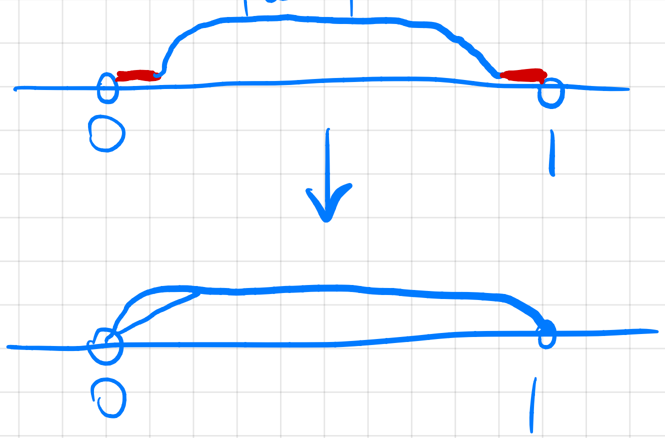
$\Longrightarrow$ $x_0 \notin \text{supp } u$.

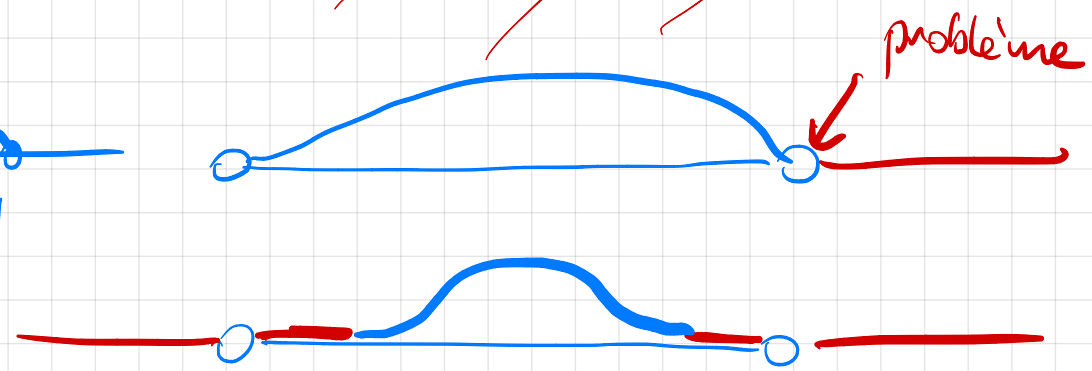
$\text{supp } u \subset K$.



$C_0^k(\Omega) \subset C^k(\Omega)$, mais pas fermé pour la topologie de $C^k(\Omega)$

Exemple pour $k=0$:



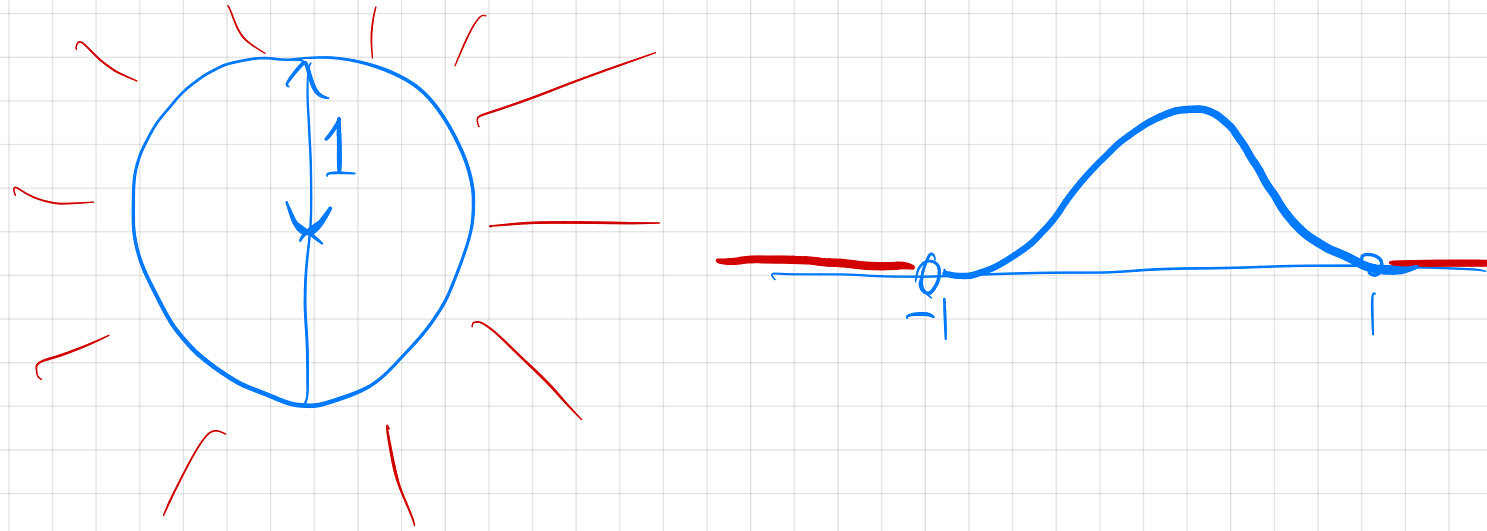


3. Approximation par convolution

Il n'est pas évident si l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ contient des fonctions autres que la fonction identiquement nulle. Pour examiner cette question, on commence par le lemme suivant.

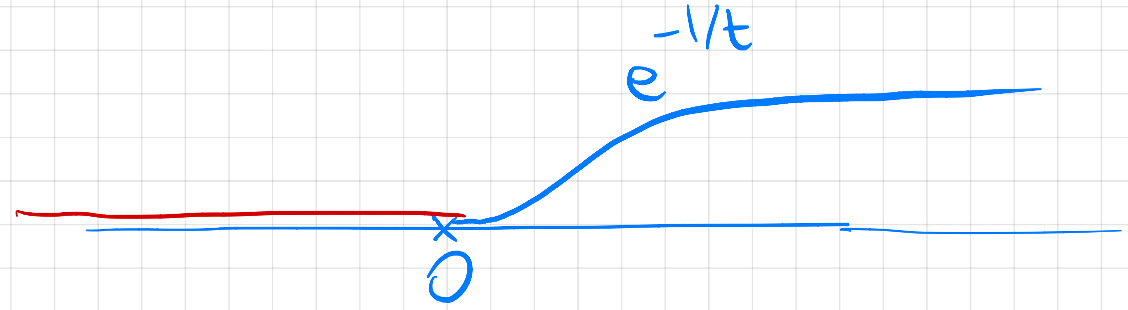
Lemme 1 Il existe une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \rho = \overline{B(0,1)}$,

$$\rho(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ tq } |x|<1, \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1.$$



Démonstration Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t \le 0. \end{cases}$$



Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $\tilde\rho(x) := f(1-|x|^2)$.

f. composée de fonctions C^∞.

On a $\tilde\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}\tilde\rho = \overline{B(0,1)}$

et $\tilde\rho(x) > 0$ pour tout x tq $|x|<1$.

Si $|x|>1$, alors $\underline{1-|x|^2} < 0 \Rightarrow \tilde\rho(x) = 0$
$\operatorname{supp}\tilde\rho \subset \overline{B(0,1)}$

Si $|x|<1$, alors $1-|x|^2>0 \Rightarrow \tilde\rho(x)>0$.

Enfin, posons $$\rho(x) := \frac{\tilde\rho(x)}{\int_{\mathbb{R}^d}\tilde\rho(y)\,dy}.$$

$\square$

$\Rightarrow$ en particulier, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ contient des fonctions non nulles.

Si $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\,f(y)\,dy \qquad (*)$$

Observons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto \varphi(x-y)$ est une fonction continue à support compact, donc l'intégrale $(*)$ converge.

si $A := \operatorname{supp}\varphi$, alors
$\operatorname{supp}(y \mapsto \varphi(x-y)) = \{x - z : z \in A\}$
$=$ "$x - A$" compact.

Lemme 2. 1) Si $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C(\mathbb{R}^d)$.

2) Si $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial_{x_i}(\varphi * f) = (\partial_{x_i}\varphi) * f, \qquad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

3) Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\varphi \in C^k_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k.$$

Démonstration

1) Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < \delta < 1$ et $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ tq $|\tilde{x} - x| < \delta$.

Soit $R \in \mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R)$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_0 > 0$ tq $\delta \leq \delta_0$ implique

$\operatorname{supp} \varphi(\tilde{x} - \cdot) \subset B(0, R + |x| + 1)$, et

$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)| \leq \varepsilon$ donc

continuité uniforme de φ.

$$|(\varphi * f)(\tilde{x}) - (\varphi * f)(x)| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)) f(y)\, dy \right|$$

$$= \left| \int_{B(0, R+|x|+1)} (\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)) f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \int_{B(0, R+|x|+1)} |\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)|\, |f(y)|\, dy$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0, R+|x|+1)} |f(y)|\, dy,$$

ce qui prouve la continuité de $\varphi * f$.

Concernant 3) :

Hérédité :

Il faut montrer que $\partial_{x_i}(\varphi * f)$ est de classe C^{k-1}, pour tout $i = 1 \dots d$.

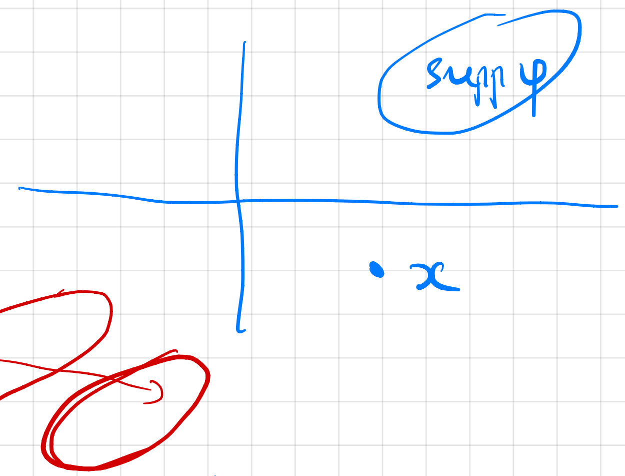
On sait d'après 2) que $\varphi * f$ est C^1 et $\partial_{x_i}(\varphi * f) = (\partial_{x_i}\varphi) * f$.

Mais $\partial_{x_i}\varphi$ est de classe C^{k-1}, donc par l'hypothèse de récurrence $(\partial_{x_i}\varphi) * f$ est de classe C^{k-1}.

Notation :

$\varphi(x - \cdot)$ signifie la fonction $y \mapsto \varphi(x - y)$.

$$\operatorname{supp}(\varphi(x - \cdot)) = x - \operatorname{supp} \varphi$$



On a $|\tilde{x}| \leq |x| + \delta \leq |x| + 1$

$\Longrightarrow$

2) Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. D'après 1), $(\partial_{x_i}\varphi) * f$ est une fonction continue.

Montrons que $\partial_{x_i}(\varphi * f)(x)$ existe et est égale à $((\partial_{x_i}\varphi) * f)(x)$.

Soit $e_i := (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ème position}}}{1}, 0, \dots)$. Il faut vérifier que

$$\left|(\varphi * f)(x + te_i) - (\varphi * f)(x) - t((\partial_{x_i}\varphi) * f)(x)\right| = o(|t|)$$

quand $t \to 0$.

← ça veut dire que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \left| \frac{(\phi * f)(x + te_i) - (\phi * f)(x)}{t} - ((\partial_{x_i}\varphi) * f)(x) \right| = 0.$$

<u>Rqe</u> Par 1), on sait que $(\partial_{x_i}\varphi) * f$ est une f. continue.

Pour cela, on exploite la continuité uniforme de $\partial_{x_i}\varphi$, de manière suivante : montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ tq $\delta \leq \delta_0$ et $|t| \leq \delta_0$ impliquent

$$|\varphi(x + te_i) - \varphi(x) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| \leq \varepsilon |t|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

En considérant séparément les parties réelle et imaginaire, on peut supposer que φ est à valeurs réelles.

Soit $\delta_0 > 0$ tq

$$|\tilde{x} - x| \leq \delta_0 \Rightarrow |\partial_{x_i}\varphi(\tilde{x}) - \partial_{x_i}\varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

L'existence de δ_0 résulte de l'uniforme continuité de $\partial_{x_i}\varphi$.

Par le théorème des accroissements finis,

$\exists\, \tilde{t}$ tq $|\tilde{t}| \leq |t|$ et

$$\varphi(x + te_i) - \varphi(x) = t\,\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i), \text{ donc}$$

$$|\varphi(x + te_i) - \varphi(x) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| =$$
$$= |t\,\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)|$$
$$\leq |t|\,|\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i) - \partial_{x_i}\varphi(x)| \leq \varepsilon|t|.$$

On conclut maintenant comme dans la partie 1) :

$$\left|(\varphi * f)(x+te_j) - (\varphi * f)(x) - t((\partial_{x_j}\varphi)*f)(x)\right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(x+te_i-y) - \varphi(x-y) - t\partial_{x_i}\varphi(x-y)\right) f(y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int_{B(0,R+|x|+1)} \left(\varphi(x+te_i-y) - \varphi(x-y) - t\partial_{x_i}\varphi(x-y)\right) f(y)\,dy \right| = o(|t|)$$

3) Récurrence par rapport à k.

<u>Remarque</u> On dit qu'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est à support compact s'il existe $K \subset \Omega$ compact tq $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega \setminus K$. On voit que, si f est à support compact, alors $\varphi * f$ également.

Si R_1 tq $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R_1)$

R_2 tq $f=0$ p.p pour $|x| \geq R_2$,

et $|x| > R_1 + R_2$ alors

$$(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) f(y)\,dy$$

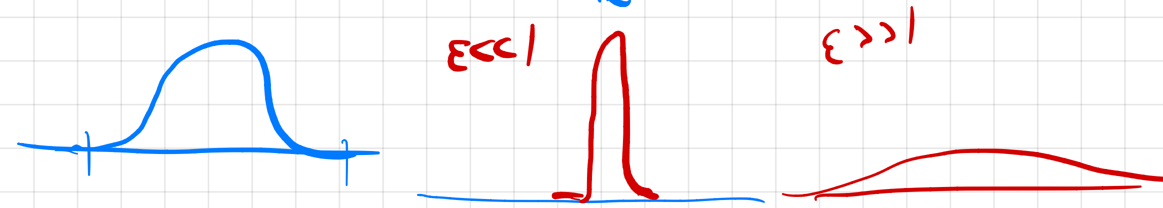
$$= \int_{|y| \leq R_2} \varphi(x-y) f(y)\,dy = 0,$$

parce que $|y| \leq R_2 \Rightarrow |x-y| \geq R_1$.

<u>Notation</u> Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les conditions du Lemme 1. Si $\varepsilon > 0$, on pose $\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Alors $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1.$$



<u>Proposition 1.</u> Si u est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, à support compact, alors $\rho_\varepsilon * u \to u$ uniformément, quand $\varepsilon \to 0$.

<u>Démonstration</u>

Soit $\delta > 0$. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\left|(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)\right| \leq \delta$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

La fonction u est continue à support compact, donc elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$|x-y| \leq \varepsilon_0 \implies |u(x)-u(y)| \leq \delta.$$

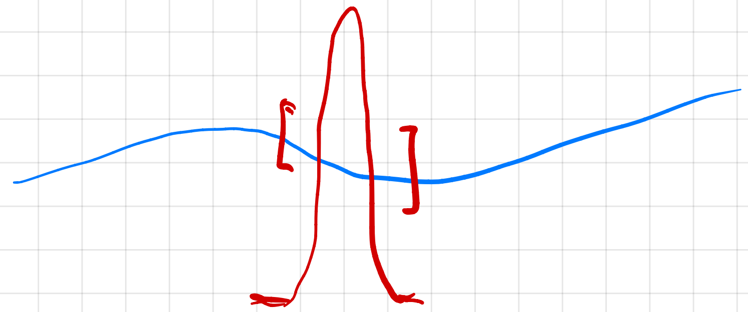
Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. On trouve :

$$|(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy - u(x) \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,u(x)\,dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,|u(y)-u(x)|\,dy \leq$$

$$\leq \sup_{|y-x| \leq \varepsilon} |u(y)-u(x)| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy \leq \delta.$$



<u>Corollaire 1.</u> Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) \longrightarrow \partial^\alpha u$ uniformément lorsque $\varepsilon \to 0$.

<u>Preuve</u> Par le Lemme 2, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = \rho_\varepsilon * (\partial^\alpha u)$, donc il suffit d'utiliser la Proposition 1, avec $\partial^\alpha u$ au lieu de u.

Lemme 2 appliqué avec $f = \rho_\varepsilon$ et $\varphi = u$.

<u>Rqe</u> $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$\varphi * f = \ldots$

Si $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\varphi * f = f * \varphi.$$

Théorème 1. 1) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \rho_\varepsilon * u - u \|_{L^p} = 0.$$

2) L'ensemble $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration

Étape 1. On montre que, $\forall v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$,

$$\| \rho_\varepsilon * v \|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}.$$

En effet,

$$\|\rho_\varepsilon * v\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy \right|^p dx.$$

Par l'inégalité de Hölder, pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy \right|^p = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)^{1/p'} \rho_\varepsilon(x-y)^{1/p} v(y)\, dy \right|^p$$

$$\leq \underbrace{\|\rho_\varepsilon(x-\cdot)^{1/p'}\|_{L^{p'}}^p}_{=1} \| \rho_\varepsilon(x-\cdot)^{1/p} v \|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\| \rho_\varepsilon * v \|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, |v(y)|^p\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|v(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, dx}_{=1} \right) dy = \|v\|_{L^p}^p.$$

Remarque 1) L'inégalité $\left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy \right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy$ peut être aussi obtenue facilement de l'inégalité de Jensen. (Exercice).

2) L'inégalité $\|\rho * v\|_{L^p} \leqslant \|\rho\|_{L^1} \|v\|_{L^p}$ est un cas particulier de l'inégalité de Young et un cas particulier de l'inégalité de Minkowski.

<u>Exercice</u> Expliquer la dernière Remarque.

<u>Étape 2.</u> Soit $\delta > 0$. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ implique

$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \leqslant \delta.$$

D'après le cours sur la théorie de la mesure, on sait qu'il existe v, une fonction continue à support compact, telle que $\|u - v\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{3}\delta$.

La Proposition implique qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \Rightarrow \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{3}\delta.$$

En utilisant l'étape 1, on obtient

$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \leqslant \|\rho_\varepsilon * u - \rho_\varepsilon * v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} + \|v - u\|_{L^p}$$

$$= \|\rho_\varepsilon * (u-v)\|_{L^p} + \|u - v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p}$$

$$\leqslant 2\|u - v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} \leqslant \delta.$$

<u>Étape 3.</u> Dans l'étape 2, on a vu que

$$\|\rho_\varepsilon * v - u\|_{L^p} \leqslant \frac{2}{3}\delta.$$

Mais $\rho_\varepsilon * v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et δ est arbitraire > 0 donc $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

$\square$

À présent, on formulera et démontrera des résultats analogues dans le cas d'un domaine général $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Théorème 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact.
Il existe une fonction $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que
$\eta(x) = 1$ pour tout $x \in K$ et $0 \leq \eta(x) \leq 1$ $\forall x \in \Omega$.

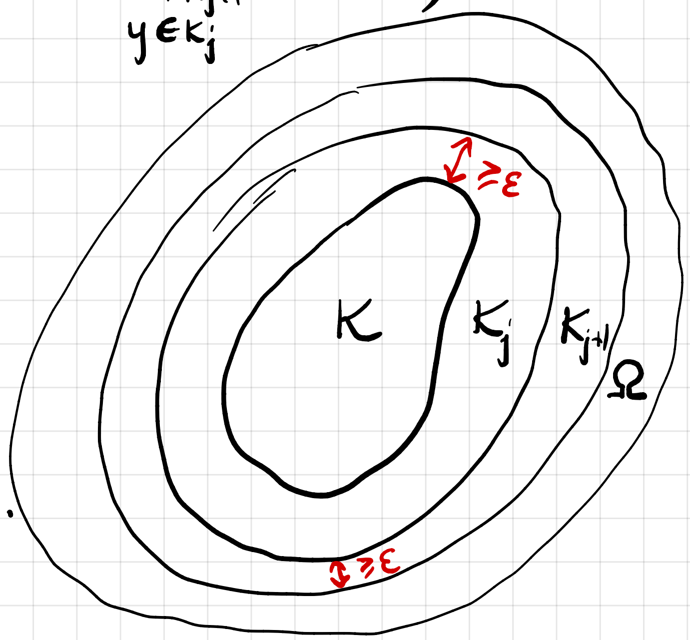
Démonstration

Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω.
Soit j tel que $K \subset \mathring{K}_j$, et posons

$$\varepsilon := \min\left(\inf_{\substack{x \in K \\ y \notin K_j}} |x-y|, \inf_{\substack{x \notin K_{j+1} \\ y \in K_j}} |x-y| \right) > 0$$

$$\eta(x) := (\rho_\varepsilon * \mathbb{1}_{K_j})(x),$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.



On sait déjà que $\eta \in C^\infty(\Omega)$.

On va montrer que $\operatorname{supp} \eta \subset K_{j+1}$.
En effet, soit $x \in \Omega \setminus K_{j+1}$. On a

$$\eta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) \mathbb{1}_{K_j}(y) dy = \int_{K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy \qquad (*)$$

← $y \in K_j$, $x \notin K_{j+1}$ $\Longrightarrow$ $|x-y| \geq \varepsilon$.

Mais $|x-y| \geq \varepsilon$ pour tout $y \in K_j$, donc $\rho_\varepsilon(x-y) = 0$,
donc $\eta(x) = 0$.

Par la définition de $C_0^\infty(\Omega)$, on conclut que
$\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

La fonction ρ_ε est positive, d'intégrale 1,
donc $(*)$ implique aussi $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\forall x \in \Omega$.

← $0 \leq \int_{K_j} \rho_\varepsilon(x-y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$.

Enfin, si $x \in K$, alors

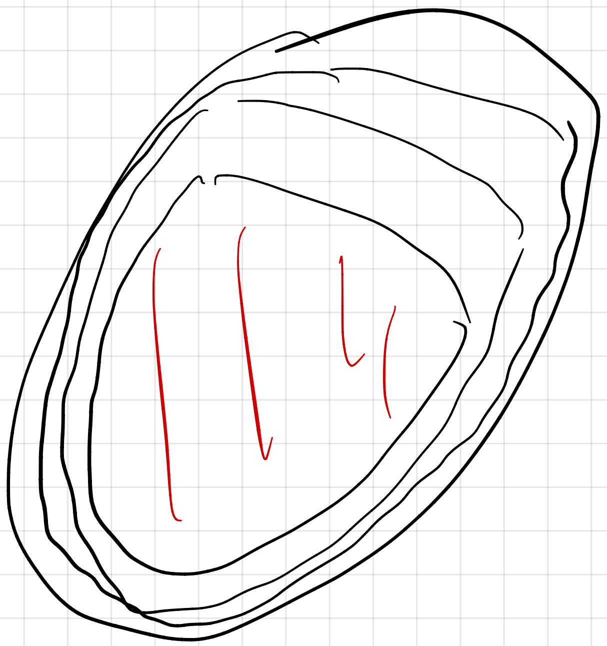
$$\eta(x) = \int_{K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

$$= 1 - \int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

$y \notin K_j$, $x \in K \Rightarrow |x-y| \geq \varepsilon$.

Par le même argument que tout à l'heure,

$\int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0$, donc $\eta(x) = 1$.



Corollaire 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω.
Il existe une suite de fonctions $(\eta_j)_j$ telles que $\eta_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta_j(x) = 1$ pour tout $x \in K_j$, $\operatorname{supp} \eta_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $0 \leq \eta_j(x) \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$.

Démonstration On applique le théorème précédent avec $\mathring{K}_{j+1}$ à la place de Ω, et K_j à la place de K.

Théorème 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$,

au sens de l'espace de Fréchet $C^k(\Omega)$ défini la semaine dernière.

2) Pour tout $p \in [1, \infty[$, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^p_{loc}(\Omega)$.

Démonstration 1) Soit $u \in C^k(\Omega)$ et $(\eta_j)_j$ la suite trouvée dans le Corollaire 2.

Il est clair que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

$$\eta_j u \in C_0^k(\Omega) \quad \text{et} \quad \lim_{j\to\infty} \eta_j u = u \text{ dans } C^k(\Omega)$$

Convergence de toutes les dérivées d'ordre $\leq k$, unif. sur tout compact.

il suffit donc de montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, où l'adhérence dans la topologie $C^k(\Omega)$.

Mais, pour $j \in \mathbb{N}^*$ donné, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \in C_0^\infty(\Omega)$, voir la preuve du Thm 2.

Par exemple, soit $\varepsilon \leq \inf_{\substack{x \in K_{j+1} \\ y \notin K_{j+2}}} |x-y| > 0$.

Comme $\operatorname{supp}(\eta_j u) \subset K_{j+1}$, l'argument dans le thm 2 montre que $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * (\eta_j u)) \subset K_{j+2}$.

Par le Corollaire 1, $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \to \eta_j u$ uniformément avec toutes les dérivées d'ordre $\leq k$, en particulier dans $C^k(\Omega)$, donc $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, donc $u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ également.

2) Exercice. $\square$

Remarque La famille (ρ_ε), lorsque $\varepsilon \to 0$, est un exemple d'une approximation de l'identité.

Rqe Pour définir $\rho_\varepsilon * (\eta_j u)$, On utilise le fait que $\eta_j u$ peut être vue comme ~~tout~~ un élément de $C_0^k(\mathbb{R}^d)$.

Partitions de l'unité

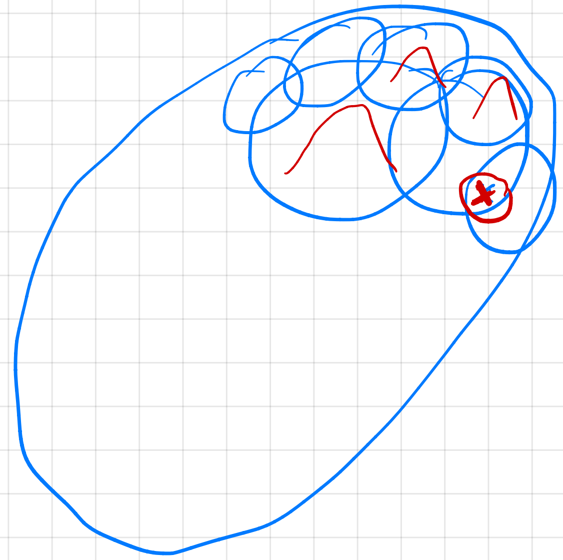
Théorème Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $(\omega_j)_j$ une famille d'ouverts telles que

i) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j$

ii) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\omega_j} \subset \Omega$ compact,

iii) $\forall x \in \Omega$, $\exists$ V ouvert tq $x \in V$ et l'ensemble $\{ j \in \mathbb{N}^* : V \cap \omega_j \neq \emptyset \}$ est fini.

"recouvrement localement fini"



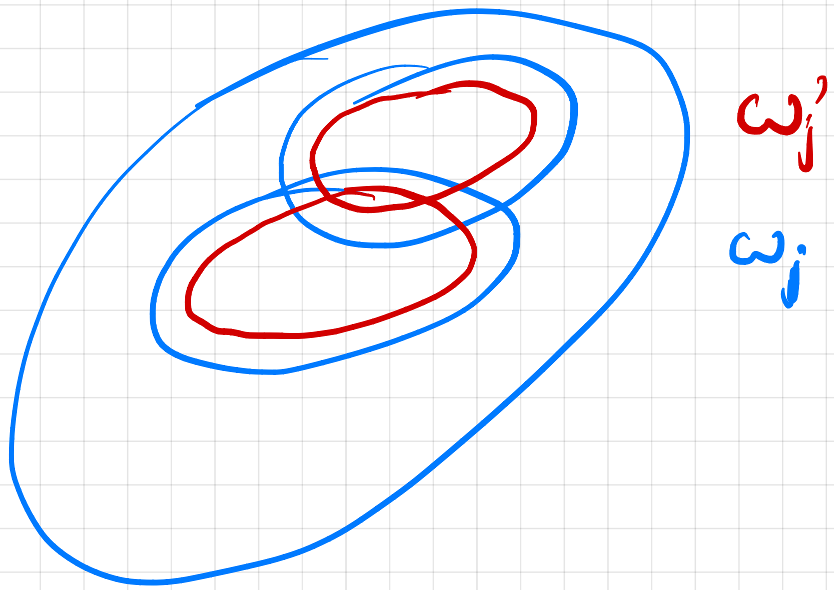
Alors il existe des fonctions $\varphi_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, telles que $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$.

Démonstration

Étape 1. On montre qu'il existe une famille $(\omega_j')_j$ d'ouverts tels que

$\cdot)$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$,

$\cdot)$ $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j'$.



On construit $\omega_1', \omega_2', \dots$ un par un, de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

$*$ $\quad \overline{\omega_j'} \subset \omega_j \quad$ pour $j = 1, \dots, m-1$

$*$ $\quad \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \omega_j' \right) \cup \left(\bigcup_{j=m}^{\infty} \omega_j \right) = \Omega$.

Pour $m = 1$, cela est vrai.

Supposons, que $\omega_1', \dots, \omega_{m-1}'$ sont construits.

Soit $\Omega_m := \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \omega_j' \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} \omega_j \right)$.

C'est un ensemble ouvert et $\Omega_m \cup \omega_m = \Omega$.

Soit $F_m := \Omega \setminus \Omega_m$. C'est un ensemble fermé dans Ω et vérifiant $F_m \subset \omega_m$.

Par hypothèse, $\overline{\omega_m}$ est un compact, donc F_m aussi.

Il existe alors ω_m' ouvert tel que

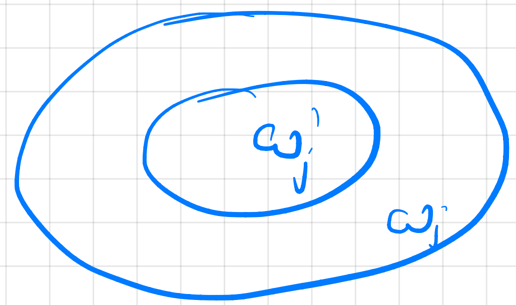
$$F_m \subset \omega_m' \subset \overline{\omega_m'} \subset \omega_m.$$

On a $\Omega = F_m \cup \Omega_m \subset \omega_m' \cup \Omega_m$, ce qui prouve l'hérédité.

Il reste à vérifier que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j'$.

Or, si $x \in \Omega$, il existe, d'après l'hypothèse iii), N tel que $x \notin \omega_j$ si $j > N$, donc $x \notin \bigcup_{j=N+1}^{\infty} \omega_j$.

Puisque $\Omega = \left(\bigcup_{j=1}^{N} \omega_j'\right) \cup \left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} \omega_j\right)$, $x \in \bigcup_{j=1}^{N} \omega_j'$.



<u>Étape 2.</u> Par le Corollaire 2, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction $\theta_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\theta_j = 1$ sur $\overline{\omega_j'}$.

Posons $\theta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x)$.

Pour tout $x \in \Omega$, c'est une somme finie sur un voisinage de x, donc de classe C^∞ sur ce voisinage.

Aussi, $\theta(x) \geq 1$ pour tout $x \in \Omega$.

On définit $\varphi_j := \theta_j / \theta$.

On termine ce chapitre par un autre résultat du même type.

Théorème Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $(\omega_j)_{j=1\dots m}$ un recouvrement ouvert fini de K par des ouvert bornés. Alors il existe $\varphi_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^m \varphi_j \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1$ sur K.

Étape 1. On montre qu'il existe une famille $(\omega_j')_{j=1}^m$ d'ouverts tels que

•) $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$, $\forall\, j = 1, \dots, m$

•) $K \subset \bigcup_{j=1}^m \omega_j$.

Exercice Faire la Étape 1.

Étape 2. Soit $\theta_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\theta_j = 1$ sur ω_j', $\Theta := \sum_{j=1}^m \theta_j$,

donc $\Theta(x) \geq 1$ sur $\bigcup_{j=1}^m \omega_j'$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\bigcup_{j=1}^m \omega_j\right)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ sur K.

On pose
$$\varphi_j(x) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)\theta_j(x)}{\theta(x)} & \text{si } x \in \bigcup_{j=1}^m \omega_j \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{j=1}^m \omega_j . \end{cases}$$

$\square$

Chapitre II. Distributions

1. Définition des distributions

Définition Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert.
Une distribution T sur Ω est une forme linéaire
$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$
$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$
telle que pour tout $K \subset \Omega$ compact
$T|_{C_K^\infty(\Omega)} : C_K^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue.

Exercice Montrer que l'ensemble des distributions sur Ω est un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$).

Notation On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Proposition Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) T est une distribution sur Ω

ii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et pour toute suite $(\varphi_n)_n$ de $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant

a) il existe $K \subset \Omega$ compact de Ω avec $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pour tout n

b) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \varphi_n \to 0$ uniformément

on a $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$.

iii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et
$\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ on a
$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Démonstration i) $\Leftrightarrow$ ii) résulte de la définition de la convergeance dans $C_K^\infty(\Omega)$.

i) $\Leftrightarrow$ iii) On utilise la Proposition 2. du Chapitre I, page 4.

Remarque Dans iii), k et C dépendent de K ! $\square$

Définition (distributions d'ordre $\leq k$)

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à $k \in \mathbb{N}$ si pour tout $K \subset \Omega$ compact $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$ s'étend en une forme linéaire continue $C_K^k(\Omega) \to \mathbb{C}$.

Exercice 1) Montrer que l'ensemble des distributions d'ordre $\leq k$ est un espace vectoriel.

2) Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre $\leq k$ si et seulement si

$\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C > 0$ tel que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Comparer avec la proposition ci-dessus.

Notation 1) On note $\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω d'ordre $\leq k$.

2) On note $\mathcal{D}'^F(\Omega) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$

l'espace des distributions d'ordre fini.

Definition On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre (exactement) $k \in \mathbb{N}^*$ si $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega) \setminus \mathcal{D}'^{(k-1)}(\Omega)$.

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre (exactement) 0 si $T \in \mathcal{D}'^{(0)}(\Omega)$.

Exemples de distributions

1) Fonctions localement intégrables.
2) Masses de Dirac
3) Dérivées de la masse de Dirac
4) Mesures de Radon, distributions positives ou nulles
5) Mesures complexes
6) $\mathrm{vp}\, \frac{1}{x}$
7) $\mathrm{Pf}(x_+^\alpha)$, $\alpha \in]-2,-1[$.