Institut Galilée
Filière M1

2020-2021

DISTRIBUTIONS

Jacek Jendrej (CNRS et USPN)
jendrej@math.univ-paris13.fr

(d'après les notes de cours du même titre par prof. Jean-Marc Delort, USPN)

CM IV, 23/03/2021

3. Support des distributions

Définition 6. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et ω un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la restriction de T à ω, $T|_\omega$, est définie comme la forme linéaire sur $C_0^\infty(\omega)$ donnée par

$$\langle T|_\omega, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

ça a un sens car on peut voir φ comme un élément de $C_0^\infty(\Omega)$ (en prolongeant par 0 en dehors de ω).

Comme $C_0^\infty(\omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$, la définition a un sens.
Si $K \subset \omega$ un compact, alors

$$\langle T|_\omega, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\omega) = C_K^\infty(\Omega),$$

donc la continuité de $T|_\omega$ sur $C_K^\infty(\omega)$ résulte directement de la continuité de T sur $C_K^\infty(\Omega)$, autrement dit $T|_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$.

On voit que, si $\omega' \subset \omega \subset \Omega$, alors $(T|_\omega)|_{\omega'} = T|_{\omega'}$.

Si $\varphi \in C_0^\infty(\omega')$, alors $\langle T|_{\omega'}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

$\langle (T|_\omega)|_{\omega'}, \varphi \rangle =$

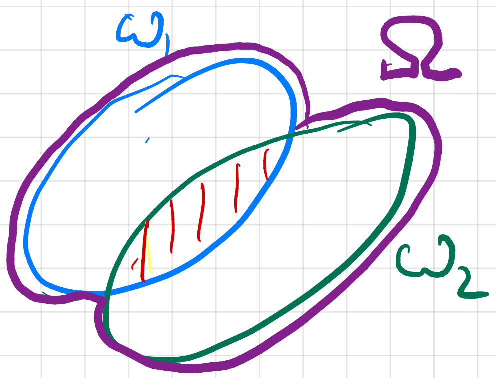
$= \langle T|_\omega, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

él. de $C_0^\infty(\omega)$

Proposition (Propriété de faisceau). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $(\omega_j)_j$ une famille localement finie d'ouverts telle que $\bigcup_{j=1}^\infty \omega_j = \Omega$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, soit $T_j \in \mathcal{D}'(\omega_j)$ et supposons que, $\forall\, i,j \in \mathbb{N}^*$ tq $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$,

$$T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}.$$

Alors, il existe une (et une seule) distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T|_{\omega_j} = T_j$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.



Démonstration

Existence : Soit $(\chi_j)_j$ une partition de l'unité subordonnée à la famille $(\omega_j)_j$, dont l'existence est garantie par le Théorème 4 du Chapitre II.

Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors $\chi_j \varphi \in C_0^\infty(\omega_j)$ et $\langle T_j, \chi_j \varphi\rangle$ a un sens. On pose

$$\langle T, \varphi\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_j, \chi_j \varphi\rangle. \qquad (*)$$

Idée : si "$T_j = T$" cette somme $\sum_{j=1}^{\infty} \langle T, \chi_j \varphi\rangle = \langle T, \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_j\right)}_{1} \varphi\rangle$

Comme $\operatorname{supp} \varphi$ est un ensemble compact, l'ensemble $\{j : \omega_j \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset\}$ est fini, donc la somme dans $(*)$ est finie.

$\forall x \in \operatorname{supp}\varphi$, $\exists$ vois. x couvert par un nombre fini de ω_j. On en extrait un recouvrement fini.

<u>Exercice</u> Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ☑

Montrons que $T|_{\omega_j} = T_j$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

On doit vérifier que

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T_j, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega_j).$$

Or,
$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T_i, \chi_i \varphi\rangle$$

Comme $\chi_i \varphi \in C_0^\infty(\omega_i \cap \omega_j)$ et que $T_i|_{\omega_i\cap\omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}$, on a $\langle T_i, \chi_i \varphi\rangle = \langle T_j, \chi_i \varphi\rangle$, d'où

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T_j, \chi_i \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T_j, \chi_i \varphi\rangle =$$
$$= \langle T_j, \sum_{i=1}^{I_0} \chi_i \varphi\rangle = \langle T_j, \varphi\rangle$$

parce que $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(x) = \sum_{i=1}^{I_0} \chi_i(x) = 1$ $\forall x \in \operatorname{supp}\varphi$.

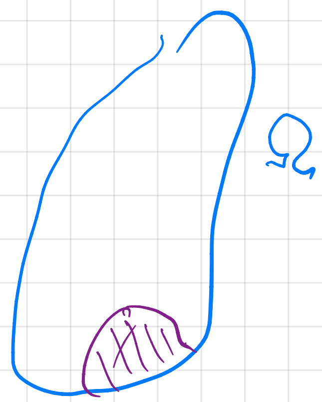
Unicité : Il suffit de voir que $T|_{\omega_i} = 0$ pour tout i implique $T = 0$. Mais, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors il existe I_0 tq $\varphi = \sum_{i=1}^{I_0} \chi_i \varphi$, donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T, \chi_i \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T|_{\omega_i}, \chi_i \varphi\rangle = 0.$$

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \left(\sum_{i=1}^{I_0} \chi_i\right)\varphi\rangle =$$

Réduction : Si $\tilde{T}$ une autre distr. qui vérifie les conditions, alors $\underbrace{(\tilde{T} - T)|_{\omega_i}}_{(T_i - T_i)|_{\omega_i}} = 0$, $\forall i$.

Définition On appelle le support de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ le complémentaire de la réunion de tous les ouverts $\omega \subset \Omega$ tels que $T|_\omega = 0$.
On le note $\mathrm{supp}(T)$.



Proposition Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

i) $x_0 \notin \mathrm{supp}\, T \Leftrightarrow \exists V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$ et $T|_V = 0$.

ii) $x_0 \in \mathrm{supp}\, T \Leftrightarrow \forall V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$,
$\exists \varphi \in C_0^\infty(V)$ tq $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

iii) Si $F \subset \Omega$ un fermé, alors
$\mathrm{supp}\, T \subset F \Leftrightarrow T|_{\Omega \setminus F} = 0$.

i) $x_0 \notin \mathrm{supp}\, T \Leftrightarrow$
$x_0 \in$ ouvert ω
tq $T|_\omega = 0$,

Démonstration i) est une réécriture de la définition.

ii) Par la partie i), on a
$x_0 \in \mathrm{supp}\, T \Leftrightarrow \forall V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$, $T|_V \neq 0$.
Mais $T|_V \neq 0$ signifie précisément qu'il existe $\varphi \in C_0^\infty(V)$ tq $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

iii) $\Leftarrow$ Si $T|_{\Omega \setminus F} = 0$, alors, comme $\Omega \setminus F$ est un ouvert, $\Omega \setminus F \subset \Omega \setminus \mathrm{supp}\, T$, autrement dit $\mathrm{supp}\, T \subset F$.

$\Rightarrow$ Soit $\mathrm{supp}\, T \subset F$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus F)$,
donc $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathrm{supp}\, T)$.

Soit $K := \mathrm{supp}\, \varphi \subset \Omega \setminus \mathrm{supp}\, T$.

$x_0 \in K \Rightarrow x_0 \notin \mathrm{supp}\, T$

Par la partie i), $\forall x_0 \in K$ il existe $\omega_{x_0} \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in \omega_{x_0}$ et $T|_{\omega_{x_0}} = 0$.
On en extrait une famille fini qui recouvre K.
Soit ω leur réunion.

$\mathrm{supp}\, \varphi = K \subset \omega$

On a $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ donc, par la Propriété de faisceau, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

<u>Exemples</u> • Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, et T_f la distribution associée. Alors $\operatorname{supp} T_f$ est le support essentiel de f.

Dém : <u>Exercice</u>

• $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$

Dém : Soit $F := \{x_0\}$ dans la Proposition ci-dessus, iii)

Si $\varphi \in C^\infty$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus \{x_0\}$, alors φ est identiquement nulle sur un voisinage ouvert de x_0, en particulier $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0) = 0$.

On a donc $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) \subset \{x_0\}$.

Il suffit maintenant de vérifier que $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) \neq \emptyset$, c'est à dire que $\partial^\alpha \delta_{x_0} \neq 0$, autrement dit qu'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0) \neq 0$.

Il suffit de prendre $\varphi(x) := \chi(x)(x - x_0)^\alpha$, où $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\chi \equiv 1$ près de x_0.

<u>Théorème</u> Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$.

Supposons que $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$ tels que

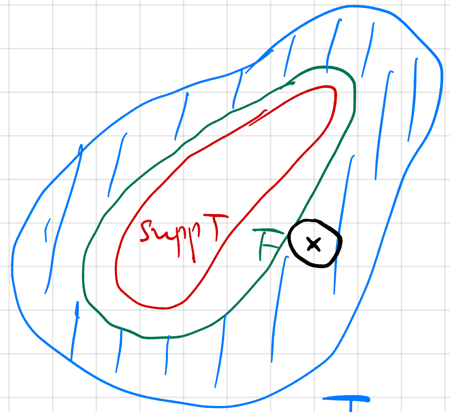
$$(*) \quad T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

<u>Démonstration</u> Par translation, on se ramène au cas $x_0 = 0$.

Soit $r > 0$ tel que $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$. On sait qu'il existe $C \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, $\forall \theta \in C^\infty$ avec $\operatorname{supp} \theta \subset \overline{B(0,r)}$

$T_{|\omega_{x_0}} = 0$, $\forall x_0$

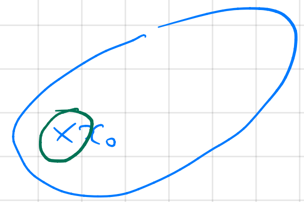
$\Rightarrow T_{|\omega} = 0$.



$T_{|\Omega \setminus F} = 0$.

1ère étape

$\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) \subset \{x_0\}$.

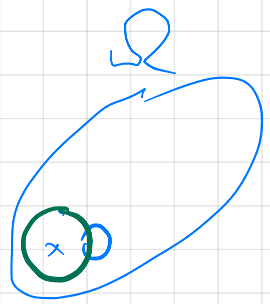


supp φ compact,

$x_0 \notin \operatorname{supp} \varphi$

$\Rightarrow \exists$ voi. de x_0, V

$V \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$,



$$(\ast\ast)\quad |\langle T, \theta\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \theta(x)|.$$

Fixons une fonction cut-off $\chi \in C^\infty_c$, $\operatorname{supp}\chi \subset \overline{B(0,r)}$.

On montrera $(\ast)$ avec

$$a_\alpha := \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle T, x^\alpha \chi\rangle.$$

Soit $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \chi(x)$.

On observe que, pour tout $|\alpha|\leq k$,

$$\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) =$$

$$= \Big\langle T - \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0,\ \varphi\Big\rangle,$$

donc il suffit de montrer que $\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0$.

Pour cela, on observe que, $\forall\, |\alpha|\leq k\ \exists C_\alpha$ tq

$|\partial^\alpha \tilde{\varphi}(x)| \leq C_\alpha |x|^{k+1-|\alpha|}$, $\quad \forall\, |x|\leq r$. (Exercice)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\varphi_n(x) := \tilde{\varphi}(x)\chi(nx)$.

La formule de Leibniz donne, pour tout $|\beta|\leq k$,

$$|\partial^\beta \varphi_n(x)| \leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial^\gamma \tilde{\varphi}(x)|\, |n^{|\beta|-|\gamma|}\partial^{\beta-\gamma}\chi(nx)|$$

Si $|x| \geq n^{-1} r$, alors la somme vaut 0.

Si $|x| \leq n^{-1} r$, alors elle s'estime par

avec une constante indépendante de n.

$$\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} C_\gamma (n^{-1} r)^{k+1-|\gamma|} n^{|\beta|-|\gamma|} \lesssim n^{|\beta|-k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc $(\ast\ast)$ implique $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = 0$.

Mais $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi} - \varphi_n) \not\ni 0$, donc $\langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \tilde{\varphi}\rangle$,

et on conclut que $\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0$.

$\square$

Proposition 1 iii), page 33.

Remarque

Il faut pas confondre

$T|_{C^\infty_K(\Omega)}$

et $T|_\omega$

$\chi \equiv 1$ sur un voisinage de x_0.

$$\Big\langle T, \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \chi(x)\Big\rangle$$

$$= \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} \underbrace{\langle T, x^\alpha \chi(x)\rangle}_{(-1)^{|\alpha|}\alpha!\, a_\alpha}$$

$(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(0) =$

$= \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi\rangle.$

$\tilde{\varphi} \in C^\infty_c(\Omega)$ vérifie

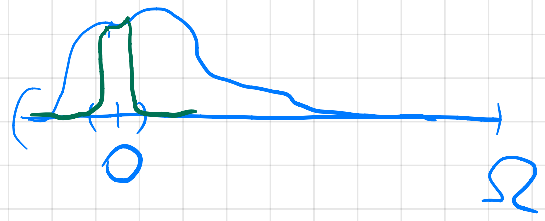
$\partial^\alpha \tilde{\varphi}(0) = 0$,

$\forall\, |\alpha| \leq k$.

<u>Exercice</u> 1) Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ et u une fonction de classe C^{k+1} sur un voisinage ouvert du segment reliant x à $x+y$. Démontrer la <u>formule de Taylor</u> :

$$u(x+y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{k+1}{\alpha!} y^\alpha \int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha u(x+ty)\,dt$$

2) Soit u une fonction de classe C^{k+1} sur la boule de centre x_0 et de rayon $r>0$, tq $\partial^\alpha u(x_0) = 0 \ \forall |\alpha| \leq k$. Montrer qu'il existe $C>0$ tq $|\varphi(x)| \leq C|x-x_0|^{k+1}$, pour tout x dans cette boule. $\boxtimes$

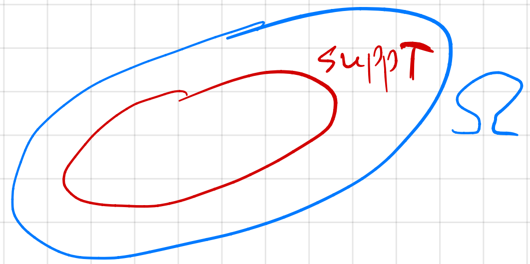


$\Rightarrow \exists$ vois. ouvert de 0 sur lequel $\varphi_n = \tilde{\varphi}$.

4. Distributions à support compact.

Définition On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact si $\operatorname{supp} T \subset \Omega$ est un ensemble compact.

On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.



Théorème Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ si, et seulement si, il existe $\widetilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue telle que $\widetilde{T}_{|C_0^\infty(\Omega)} = T$.

Rqe $C^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet

Remarque On sait (Théorème 3, p. 29) que l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^\infty(\Omega)$, donc $\widetilde{T}$, si elle existe, est unique.

Démonstration du théorème

Supposons d'abord qu'il existe $\widetilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$, une extension continue de T. Par la Proposition 2, page 4, il existe $K_j \subset \Omega$ compact, $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Montrons que $\operatorname{supp} T \subset K_j$.

En effet, soit $x_0 \notin K_j$, et $V \subset \Omega$ un ouvert tq $x_0 \in V$ et $V \cap K_j = \emptyset$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset V$, alors $\sup_{x \in K_j} |\partial_x^\alpha \varphi(x)| = 0$ pour tout $|\alpha| \leq k$, donc l'inégalité ci-dessus montre que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Cela montre que $x_0 \notin \operatorname{supp} T$, autrement dit $\operatorname{supp} T \subset K_j$.

Inversement, supposons que $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Soit $K_j \subset \Omega$ compact tq $\operatorname{supp} T \subset \mathring{K}_j$.

Par la définition d'une distribution, page 33,

$T|_{C^\infty_{K_j}(\Omega)} : C^\infty_{K_j}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue,

autrement dit il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C^\infty \text{ tq } \operatorname{supp} \varphi \subset K_j.$$

Fixons $\chi \in C^\infty$ tq $\chi(x) = 1$, $\forall x \in$ du vois. ouvert supp T, $\operatorname{supp} \chi \subset K_j$.

Soit $\psi \in C^\infty_0(\Omega)$ et considérons $\varphi := \chi\psi$.

Par la règle de Leibniz, il existe $C_\chi \geq 0$ tq

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha (\chi\psi)| \leq C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi|.$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus, on obtient

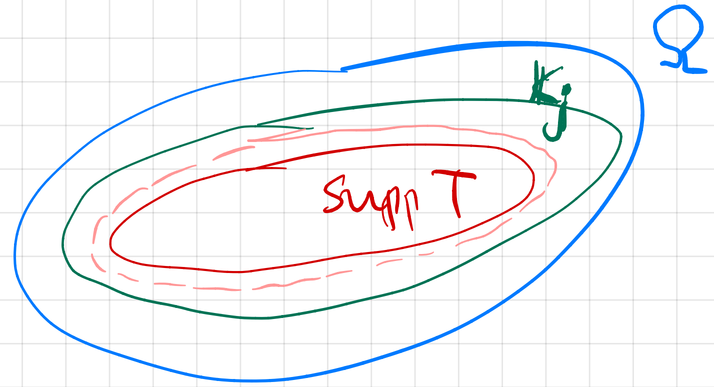
$$|\langle T, \chi\psi \rangle| \leq C C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

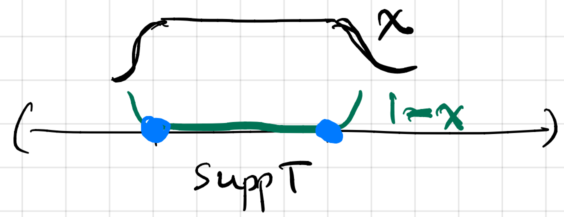
Comme $\operatorname{supp}((1-\chi)\psi) \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, $\langle T, (1-\chi)\psi \rangle = 0$ et

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi(x)|, \quad \forall \psi \in C^\infty_0(\Omega).$$

On en déduit que T s'étend en une application continue $\tilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$.

<u>Remarque 1</u>. En particulier, toute distribution à support compact est d'ordre fini.





$\operatorname{supp} \varphi \subset K_j$,
$\varphi = \psi$ sur supp T.

$\psi = \chi\psi + (1-\chi)\psi$.

Chapitre IV : Opérations sur les distributions

1. Produit d'une distribution et d'une fonction C^∞

Théorème et Définition Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$.

On définit aT par

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

Si $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $C \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tq

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|, \quad \forall \psi \in C_K^\infty(\Omega).$$

Si $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors $a\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ aussi, donc

$$|\langle T, a\varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (a\varphi)(x)|$$

$$\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

où la dernière inégalité est une conséquence de la formule de Leibniz. On a donc

$aT : C_K^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ continue, cqfd $\square$

Rappel

Si $T = T_f$, $f \in L^1_{loc}$, alors

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Si $a \in C^\infty(\Omega)$, alors $\underbrace{af}_{} \in L^1_{loc}$

défini de manière habituelle (produit ponctuel)

On a envie d'avoir $aT_f = T_{af}$

$$\langle aT_f, \varphi \rangle = \int_\Omega (af)(x)\varphi(x)dx$$

$$= \int_\Omega a(x)f(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_\Omega f(x)[a(x)\varphi(x)]dx = \langle T_f, a\varphi \rangle.$$

Exercice Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a, b \in C^\infty(\Omega)$. Montrer que :

1) $\operatorname{supp}(aT) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$ égalité ?
2) $(a+b)T = aT + bT$
3) $a(T+S) = aT + aS$
4) $a(bT) = (ab)T$.

Rqe Si $T = T_f$, $f \in L^1_{loc}$, alors

$$aT_f = T_{af}$$

Exemples

- $a\,\delta_{x_0} = a(x_0)\,\delta_{x_0}$
- $x \,\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1.$

Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors

$$\langle a\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, a\varphi \rangle =$$

$$= (a\varphi)(x_0) = a(x_0)\varphi(x_0) =$$

$$= a(x_0)\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

$$= \langle a(x_0)\,\delta_{x_0}, \varphi \rangle.$$

Exercice Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $xT = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $T = \lambda\,\delta_0$.

2. Dérivation des distributions

Définition et théorème Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit une forme linéaire $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ sur $C_0^\infty(\Omega)$ en posant

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle := -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration Si $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$, $\forall \psi \in C_K^\infty(\Omega)$,

donc $\left|\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle\right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \partial_{x_j} \varphi(x)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k+1} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$,

donc $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Propriétés i) Si $T = T_f$ avec f de classe C^1, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}.$$

ii) $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'^{(k+1)}(\Omega)$

iii) $\operatorname{supp} \frac{\partial T}{\partial x_j} \subset \operatorname{supp} T$

iv) si $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(aT) = \frac{\partial a}{\partial x_j} T + a \frac{\partial T}{\partial x_j}$.

Preuve. **Exercice**

Remarque (dérivées d'ordre supérieur)

Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$.

Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$\left\langle x \operatorname{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \left\langle \operatorname{vp}\frac{1}{x}, x\varphi \right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \varphi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} x \varphi(x)\,dx \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times \varphi(x)\,dx.$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle.$$

$T = T_f$

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\langle T_f, \partial_{x_j} \varphi \rangle =$$

$$= -\int_\Omega f(x)\, \partial_{x_j} \varphi(x)\,dx$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \int_\Omega \partial_{x_j} f(x)\, \varphi(x)\,dx$$

(pas de terme de bord car $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$)

$$= \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \varphi \right\rangle$$

En particulier, indépend. par rapport à l'ordre des dérivations (le thm de Schwarz) est vrai.

3. Exemples de dérivées au sens des distributions

Exemple 1. Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $v(x) := \int_0^x u(t)\,dt$.

Alors v est une fonction continue et la dérivée de T_v au sens des distributions est T_u.

$v' = u$ au sens des distributions.

Preuve. On écrit u au lieu de T_u et v au lieu de T_v.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\langle v', \varphi \rangle = -\langle v, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x u(y)\,dy \right) \varphi'(x)\,dx.$$

On peut utiliser Fubini :

$$\langle v', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(y)\, \varphi'(x)\, \mathbb{1}_{0<y<x}\, dx \right) dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(y)\, \varphi'(x)\, \mathbb{1}_{x<y<0}\, dx \right) dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_y^{+\infty} \varphi'(x)\,dx \right) \mathbb{1}_{y>0}\, u(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{y} \varphi'(x)\,dx \right) \mathbb{1}_{y<0}\, u(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, \mathbb{1}_{y>0}\, u(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, \mathbb{1}_{y<0}\, u(y)\,dy = \langle u, \varphi \rangle.$$

Exemple 2. Soit $H(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$. Alors $H' = \delta_0$.

fonction de Heaviside

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle =$$

$$= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^M \varphi'(x)\,dx \underset{\text{IPP}}{=} \varphi(0).$$

$$= \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Exemple 3. Au sens des distributions, $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

Proposition Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $T \in \mathcal{D}'(I)$.

Alors $T = \text{const} \iff T' = 0$.

Démonstration $\Rightarrow$ évident.

$\Leftarrow$ Si $T' = 0$, alors $\langle T, \theta' \rangle = 0$, $\forall \theta \in C_0^\infty(I)$.

Fixons $\rho \in C_0^\infty(I)$ avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$.

Si $\varphi \in C_0^\infty(I)$, soit

$$\psi(x) := \varphi(x) - \rho(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \in C_0^\infty(I).$$

Soit $\theta(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$.

Alors $\theta' = \psi$ et $\theta \in C_0^\infty(I)$.

En effet, si $a < b$ sont tels que

$\operatorname{supp} \varphi \cup \operatorname{supp} \rho \subset [a,b] \subset I$, alors

$\operatorname{supp} \theta \subset [a,b]$, puisque, si $x \geq b$,

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy\right) dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy\right) dz = 0.$$

Par conséquent, $\langle T, \theta' \rangle = \langle T, \psi \rangle = 0$ donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \rho \rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy = C \langle 1, \varphi \rangle,$$

où $C := \langle T, \rho \rangle$, donc $T = C = \text{const}$.