Institut Galilée
Filière M1

2020–2021

DISTRIBUTIONS

Jacek Jendrej (CNRS et USPN)

jendrej@math.univ-paris13.fr

(d'après les notes de cours du même titre par prof. Jean-Marc Delort, USPN)

CM $\underline{\text{V}}$, 30/03/2021

Proposition Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $T \in \mathcal{D}'(I)$.

Alors $T = \text{const} \iff T' = 0$.

Démonstration $\Rightarrow$ évident.

$\Leftarrow$ Si $T' = 0$, alors $\langle T, \theta' \rangle = 0$, $\forall \theta \in C_0^\infty(I)$.

Fixons $\rho \in C_0^\infty(I)$ avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$.

Si $\varphi \in C_0^\infty(I)$, soit

$$\psi(x) := \varphi(x) - \rho(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \in C_0^\infty(I).$$

Soit $\theta(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$.

Alors $\theta' = \psi$ et $\theta \in C_0^\infty(I)$.

En effet, si $a < b$ sont tels que

$\operatorname{supp} \varphi \cup \operatorname{supp} \rho \subset [a, b] \subset I$, alors

$\operatorname{supp} \theta \subset [a, b]$, puisque, si $x \geq b$,

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \right) dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \right) dz = 0.$$

Par conséquent, $\langle T, \theta' \rangle = \langle T, \psi \rangle = 0$ donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \rho \rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy = C \langle 1, \varphi \rangle,$$

où $C := \langle T, \rho \rangle$, donc $T = C = \text{const}$.

$T = \text{const}$ ça veut dire

T peut être identifiée

à une fonction constante

$T = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \lambda \int_{\Omega} \varphi(x)dx.$$

Soit $T = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

on calcule T'.

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle =$$

$$= -\lambda \int_I \varphi'(x)dx = -\lambda \times 0 = 0.$$

Il est clair que $\operatorname{supp}(\psi) \subset [a, b]$

si $x \leq a$, alors il est clair que

$\theta(x) = 0$.

4. Translations, changement d'échelle, changement de variables.

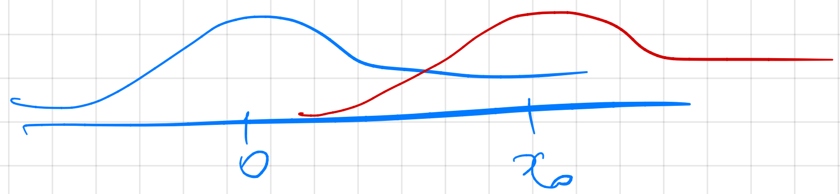
Notation : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$.

On pose $(\tau_a \varphi)(x) := \varphi(x-a)$.

fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$.

translation de f :

$$(\tau_{x_0} f)(x) := f(x-x_0)$$



Définition Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$.

On définit $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

$\boxtimes$

Si T est une fonction f $(T = T_f)$, alors

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_{-a}\varphi \rangle = $$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x+a)\,dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle.$$

En identifiant T_f à f, on écrit

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \langle \tau_a f, \varphi \rangle$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et, pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, soit $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_\lambda(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\varphi(x)\,dx =$$

$y = \lambda x$
$dy = |\lambda|^d dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,|\lambda|^{-d}\varphi(y/\lambda)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,|\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda}(y)\,dy.$$

On utilise donc cette formule pour définir T_λ lorsque $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

Définition Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

On définit $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T_\lambda, \varphi \rangle := \langle T, |\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda} \rangle.$$

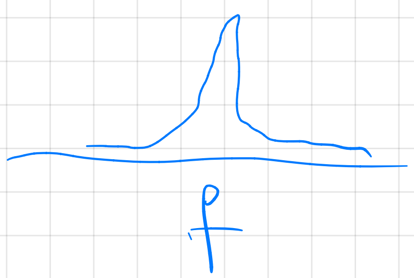
$\boxtimes$

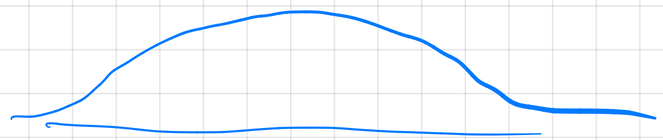
Exemple $T = \delta_0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. C'est quoi T_λ ?

On calcule:

$$\langle T_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, |\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda} \rangle = \langle \delta_0, |\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda} \rangle =$$

$$= |\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda}(0) = |\lambda|^{-d}\varphi(0), \text{ donc } (\delta_0)_\lambda = |\lambda|^{-d}\delta_0.$$





Soient $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ deux ouverts, $\kappa : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme C^∞. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $f \circ \kappa^{-1} : \Omega' \to \mathbb{C}$. Alors $f \circ \kappa^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega')$.
Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, on a

$$\int_{\Omega'} (f \circ \kappa^{-1})(x') \varphi(x') \, dx' = \int_{\Omega} f(x) \, \varphi(\kappa(x)) \, |\det J_\kappa(x)| \, dx,$$

où $J_\kappa(x)$ est la matrice jacobienne de κ.
On a donc $\langle T_{f \circ \kappa^{-1}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \circ \kappa \, |\det J_\kappa| \rangle$,

et $x \mapsto \varphi \circ \kappa(x) \, |\det J_\kappa(x)|$ est une fonction C^∞ car $J_\kappa(x)$ ne s'annule pas.
Cela permet de définir la composition d'une distribution et d'un difféomorphisme C^∞.

Si T est une fonction :

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\text{"}T\text{"}"'] & \Omega' \arrow[dl] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

$T \circ \kappa^{-1} : \Omega' \to \mathbb{C}$.

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$.
$\kappa^* \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$
$\quad \parallel$
$\varphi \circ \kappa$

<u>Notation</u> : Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, on pose $\kappa^* \varphi := \varphi \circ \kappa \in C_0^\infty(\Omega)$, donc $\kappa^* : C_0^\infty(\Omega') \to C_0^\infty(\Omega)$ lorsque $\kappa : \Omega \to \Omega'$.

<u>Définition et proposition</u> Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\kappa : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme C^∞. On définit $\kappa_* T \in \mathcal{D}'(\Omega')$ par

$$\langle \kappa_* T, \varphi \rangle := \langle T, (\kappa^* \varphi) \, |\det J_\kappa| \rangle.$$

<u>Démonstration</u> Soit $K' \subset \Omega'$ compact.
On doit montrer qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ et $C' \geq 0$ tq

$$|\langle \kappa_* T, \varphi \rangle| \leq C' \sum_{|\alpha| \leq k'} \sup_{x' \in K'} |\partial^\alpha \varphi(x')|.$$

Soit $K := \kappa^{-1}(K') \subset \Omega$ compact. Alors $\kappa^* \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$.
Si on pose $\psi = \kappa^* \varphi \, |\det J_\kappa|$, on a donc

$$\langle \kappa_* T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle.$$

Comme $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Il suffit donc de voir que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha [\varphi \circ \kappa(x) |\det J_\kappa(x)|]|$$
$$\leq C'' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x' \in \Omega'} |\partial^\alpha \varphi(x')|.$$

Or on vérifie par récurrence que $\partial^\alpha [\varphi \circ \kappa(x)]$ est combinaison linéaire d'expressions

$(\partial^\beta \varphi)(\kappa(x))\ P_{\alpha,\beta}\left(((\partial^\gamma \kappa)_{1 \leq |\gamma| \leq |\alpha|}\right)$ avec $|\beta| \leq |\alpha|$

et $P_{\alpha,\beta}$ polynôme.

<u>Exemple</u> Soit $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphisme.

Calculons $\kappa_* \delta_0$. On a

$$\langle \kappa_* \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, (\varphi \circ \kappa)|\kappa'| \rangle$$
$$= \varphi \circ \kappa(0)\, |\kappa'(0)| = |\kappa'(0)| \langle \delta_{\kappa(0)}, \varphi \rangle,$$

donc $\kappa_* \delta_0 = |\kappa'(0)|\, \delta_{\kappa(0)}$.

<u>Remarque</u> Les translations et les changements d'échelle sont des cas particuliers de changements de variables.

5. Limite d'une suite de distributions

Définition Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

On écrit souvent $T_n \rightharpoonup T$.

Propriétés i) Si $T_n \rightharpoonup T$, alors $\partial^\alpha T_n \rightharpoonup \partial^\alpha T$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

ii) Si $(f_n)_n$ une suite dans $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, et $f_n \to f$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$, alors $T_{f_n} \longrightarrow T_f$.

$\boxtimes$

Rqe Si $T_n \rightharpoonup T$ et $T_n \rightharpoonup S$ alors $T = S$.

Définition Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite $S_n := \sum_{n'=0}^{n} T_{n'}$ converge.

Remarque Si $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge, alors

$$\partial^\alpha \Big(\sum_{n=0}^{\infty} T_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^\alpha T_n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Exemples

i) Soit $\chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\int \chi(x)\,dx = 1$, et $\chi_n(x) := n^d \chi(nx)$. Alors $\chi_n \rightharpoonup \delta_0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il faut vérifier que

$$\langle \chi_n, \varphi\rangle \longrightarrow \varphi(0).$$

$$\langle \chi_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} n^d \chi(nx)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(y)\varphi(y/n)\,dy =$$

$$= \int_{|y| \le n\varepsilon} \chi(y)\varphi(y/n)\,dy + \int_{|y| \ge n\varepsilon} \chi(y)\varphi(y/n)\,dy$$

ii) Soit $\chi_n(x) := \exp(2\pi i n x)$, $\chi_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $\chi_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

iii) $\dfrac{\mathbb{1}_{\{|x| > \varepsilon\}}}{x} \longrightarrow \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$.

Remarque Dans le dernier exemple il n'y a pas de suite ; il faut comprendre que $\lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle \dfrac{\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}}{x}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}, \varphi \right\rangle$ $\forall \varphi$.

Théorème Soit $(T_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, il existe $l_\varphi \in \mathbb{C}$ avec $\langle T_n, \varphi \rangle \to l_\varphi$. Il existe alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \to T$.

Démonstration

Il est évident que $\langle T, \varphi \rangle := l_\varphi$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$.
Il suffit de montrer que $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$ est continue pour tout $K \subset \Omega$ compact.

Rappelons que $C_K^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet.
Les formes linéaires $(T_n|_{C_K^\infty(\Omega)})_n$ vérifient les conditions du Théorème 1, page 7, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

En passant à la limite, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega),$$

autrement dit la continuité de $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$.

$\square$

Exercice Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_{he_j} T - T}{h} = \partial_{x_j} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

$\boxtimes$

Banach-Steinhaus pour $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\varphi \mapsto l_\varphi$ est une forme linéaire.

Pour tout $\varepsilon > 0$, la deuxième intégrale $\to 0$ quand $n \to \infty$.

La 1ère intégrale :

Soit $\delta > 0$, alors $\exists\, \varepsilon > 0$ tq
$|\varphi(y/n) - \varphi(0)| < \delta \quad \forall\, |y| \leq n\varepsilon$,
ce qui implique

$$\left| \int_{|y| \leq n\varepsilon} \chi(y) \varphi(y/n)\, dy - \varphi(0) \int_{|y| \leq n\varepsilon} \chi(y)\, dy \right|$$

$$\leq \delta \times \int_{|y| \leq n\varepsilon} |\chi(y)|\, dy \leq C\delta.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} n^d \chi(nx) \varphi(x)\, dx \to \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Rqe Il est clair que, si $T_n \to T$, alors l_φ existe et $l_\varphi = \langle T, \varphi \rangle$.

De même, si $(S_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}'(\Omega)$, on écrit $S_n \rightharpoonup S$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \langle S_n, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Rqe

Convergence faible $-*$ dans $(C^\infty(\Omega))^*$

Proposition Soit $(S_n)_n$ une suite dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ telle que, $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$, il existe $l_\varphi \in \mathbb{C}$ avec $\langle S_n, \varphi \rangle \longrightarrow l_\varphi$.
Il existe alors $K \subset \Omega$ compact tel que $\mathrm{supp}(S_n) \subset K$ pour tout n, et $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$, telle que $\mathrm{supp}(S) \subset K$ et $S_n \rightharpoonup S$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Démonstration **Exercice.**

Indication : $C^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

$\boxtimes$

6. Produit de convolution des distributions

Convolution d'une distribution par une fonction test

Notation Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ la fonction $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$.

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ la distribution $\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle$. $\boxtimes$

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, et $\varphi, \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par le thm de Fubini,

$$\langle \varphi * f, \chi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi * f)(y)\, \chi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(y-x) \chi(y)\, dx\, dy$$

$T_{\varphi * f}$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (\check{\varphi} * \chi)(x)\, dx = \langle f, \check{\varphi} * \chi \rangle .$$

Comme d'habitude, on utilise cette relation pour <u>définir</u> $\varphi * T$ pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

Définition Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On définit $\varphi * T = T * \varphi$ par

$$\langle \varphi * T, \chi \rangle = \langle T * \varphi, \chi \rangle := \langle T, \check{\varphi} * \chi \rangle, \qquad \forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Exercice Montrer que cette condition définit, en effet, une distribution.

Proposition 1) Pour tous $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\alpha(\varphi * T) = (\partial^\alpha \varphi) * T = \varphi * (\partial^\alpha T).$$

2) Pour tous $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$(\varphi * \psi) * T = \varphi * (\psi * T)$$

$\Omega = \mathbb{R}$.

$a =$ 

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $\langle T, a\varphi \rangle$ est bien défini même si φ n'est pas lisse sur $[0,1]$.

$\Rightarrow aT$ s'étend sur un espace plus grand.

$$\iint_{\mathbb{R}^d\,\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(y-x) \chi(y)\, dx\, dy =$$

$y - x \leftarrow x$

$x \leftarrow y - x$

$$\iint_{\mathbb{R}^d\,\mathbb{R}^d} \varphi(y-x) f(x) \chi(y)\, dx\, dy$$

$\varphi(y-x) = \check{\varphi}(x-y)$

$x' = y - x, \quad y' = y$

$x = y' - x'$

Démonstration

1) Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par les définitions, on a

$$\langle \partial^\alpha(\varphi * T), \chi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \varphi * T, \partial^\alpha \chi \rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{\varphi} * (\partial^\alpha \chi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\check{\varphi} * \chi) \rangle$$

$$= \langle \partial^\alpha T, \check{\varphi} * \chi \rangle = \langle \varphi * (\partial^\alpha T), \chi \rangle, \quad \text{et}$$

$$(-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{\varphi} * (\partial^\alpha \chi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, (\partial^\alpha \check{\varphi}) * \chi \rangle$$

$$= \langle T, (\partial^\alpha \varphi)^\vee * \chi \rangle = \langle (\partial^\alpha \varphi) * T, \chi \rangle.$$

2) Si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle (\varphi * \psi) * T, \chi \rangle = \langle T, (\varphi * \psi)^\vee * \chi \rangle \quad \text{et}$$

$$\langle \varphi * (\psi * T), \chi \rangle = \langle \psi * T, \check{\varphi} * \chi \rangle$$
$$= \langle T, \psi^\vee * (\varphi^\vee * \chi) \rangle,$$

donc il suffit de vérifier que $(\varphi * \psi)^\vee * \chi = \psi^\vee * (\varphi^\vee * \chi)$.

On calcule :

$$((\varphi * \psi)^\vee * \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y)(\varphi * \psi)(-y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-y-z)\psi(z)\, dz\, dy,$$

$$(\psi^\vee * (\varphi^\vee * \chi))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-x+y')(\varphi^\vee * \chi)(y')\, dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-x+y') \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z'-y')\chi(z')\, dz'\, dy',$$

ce qui est la même chose par le changement des variables $(y', z') = (x+z, x-y)$. $\square$

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y) f(y)\,dy = \langle f, \varphi(x - \cdot)\rangle.$$

$\langle f, \varphi_x \rangle$, où $\varphi_x(y) := \varphi(x-y)$

Cela reste vrai pour les distributions:

<u>Théorème</u> Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(T*\varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot)\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

$\langle T, \varphi_x \rangle$, où $\varphi_x(y) := \varphi(x-y)$.

<u>Démonstration</u>

Soit $\psi(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot)\rangle$. On montre d'abord que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et ensuite que $T * \varphi = \psi$.

Il suffit de vérifier que $\psi \in C^1$ et $\partial_{x_j}\psi(x) = \langle T, \partial_{x_j}\varphi(x - \cdot)\rangle$.

Par récurrence, il en résultera que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, soit $\varphi_x(y) := \varphi(x-y)$.

$\psi(x) = \langle T, \varphi_x \rangle$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $x_n \longrightarrow x_0$. On voit alors qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $\operatorname{supp}(\varphi_{x_n}) \subset K$, $\forall n$, et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi_{x_n}(y) - \partial^\alpha \varphi_{x_0}(y)| = 0,$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{y} |\partial^\alpha \varphi(x_n - y) - \partial^\alpha \varphi(x_0 - y)| = 0,$$

ce qui est vrai car $\partial^\alpha \varphi$ est uniformément continue.

donc $\varphi_{x_n} \longrightarrow \varphi_{x_0}$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc $\psi(x_n) \to \psi(x_0)$, donc ψ est une fonctions continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et considérons

$$\psi(x_0 + he_j) - \psi(x_0) - h\langle T, \partial_{x_j}\varphi(x_0 - \cdot)\rangle =$$

$$= \langle T, \varphi(x_0 + he_j - \cdot) - \varphi(x_0 - \cdot) - h\,\partial_{x_j}\varphi(x_0 - \cdot)\rangle$$

Par la formule de Taylor,

$$\varphi(x_0 + he_j - y) - \varphi(x_0 - y) - h\,\partial_{x_j}\varphi(x_0 - y) =$$

$$= h^2 \int_0^1 (1-s)\,\partial_{x_j}^2 \varphi(x_0 - y + hse_j)\,ds.$$

En dérivant par rapport à y sous le signe d'intégration, on obtient que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\exists C_\alpha \geq 0$ tq

$$\sup_{y\in K} \left|\partial^\alpha\left(\varphi(x_0+he_j-y)-\varphi(x_0-y)-h\partial_{x_j}\varphi(x_0-y)\right)\right| \leq C_\alpha h^2,$$

donc $\left|\psi(x_0+h)-\psi(x_0)-h\langle T, \partial_{x_j}\varphi(x_0-\cdot)\rangle\right| \lesssim h^2$,

ce qui montre que $\partial_{x_j}\psi(x_0) = \langle T, \partial_{x_j}\varphi(x_0-\cdot)\rangle$.

Continuité de $T \Rightarrow$ $\exists\, C, k$ tq

$$|\langle T, \chi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \chi(x)|,$$

$\forall \chi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\lesssim h^2$ signifie $\leq C C_\alpha h^2$.

Montrons maintenant que $T*\varphi = \psi$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il faut vérifier que

$$\langle T*\varphi, \chi\rangle = \langle \psi, \chi\rangle \Leftrightarrow \langle T, \check{\varphi}*\chi\rangle = \langle\psi,\chi\rangle$$

$$\Leftrightarrow \left\langle T, y\mapsto \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x-y)\chi(x)dx\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\chi(x)\langle T, y\mapsto\varphi(x-y)\rangle\, dx,$$

il faut donc justifier la possibilité d'échanger l'ordre de T et $\int$. L'idée est d'approcher l'intégrale par sa somme de Riemann, et d'utiliser la linéarité de T.

Pour $h>0$, soit $\xi_h(y) := h^d \sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}^d \\ hz\in \operatorname{supp}\chi}} \varphi(hz-y)\chi(hz)$.

Alors tous les $\operatorname{supp}(\xi_h)$ sont dans un compact fixe K pour $|h|\leq 1$, et $\lim_{h\to 0}\xi_h = y\mapsto \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x-y)\chi(x)dx$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$. En effet, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha\xi_h$ est une famille de fonctions continues, bornées uniformément, et $\partial^\alpha\xi_h(y) \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\partial^\alpha\varphi(x-y)\chi(x)dx$ pour tout $y\in K$.

Il en résulte que la convergence est uniforme.

Or, T est continue $C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, donc

$$\left\langle T, y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\chi(x)dx \right\rangle = \lim_{h\to 0} \langle T, \xi_h \rangle.$$

Pour tout $h>0$, la somme définissant ξ_h est finie, donc

$$\langle T, \xi_h\rangle = h^d \sum_{\substack{z\in \mathbb{Z}^d \\ hz \in \operatorname{supp}\chi}} \langle T, y \mapsto \varphi(hz-y)\chi(hz)\rangle =$$

$$= h^d \sum_{\substack{z\in \mathbb{Z}^d \\ hz \in \operatorname{supp}\chi}} \chi(hz)\langle T, y\mapsto \varphi(hz-y)\rangle = h^d \sum_{\substack{z\in \mathbb{Z}^d \\ h\in \operatorname{supp}\chi}} \chi(hz)\psi(hz).$$

La fonction ψ est continue, donc la dernière somme de Riemann converge vers $\langle \psi, h\rangle$. $\square$

<u>Théorème</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Il existe une suite $(\psi_n)_n$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> Soit ρ_ε le "noyau régularisant", comme au Chapitre II. 3, page 20.

$$\frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \rho \geq 0, \ \operatorname{supp}\rho = B(0,1) \quad \int \rho(x)dx = 1.$$

Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts et $\chi_j \in C^\infty_{K_{j+1}}(\Omega)$, $\chi_j = 1$ sur K_j.
On pose $\psi_n := \chi_n(\rho_{1/n} * T)$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour n assez grand, $\chi_n = 1$ sur $\operatorname{supp}\varphi$, donc

$$\langle \psi_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\chi_n(x)(\rho_{1/n} * T)(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(\rho_{1/n} * T)(x)\,dx = \langle \rho_{1/n} * T, \varphi\rangle =$$

$$= \langle T, \check{\rho}_{1/n} * \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$$ (cf. Corollaire 1, page 24)

Convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact

Définition Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$,

alors $T * S = S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \langle T, \check{S} * \varphi \rangle .$$

Exercice Montrer que la condition ci-dessus définit un élément $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Indication : Si S et φ sont à support compact, $S * \varphi$ aussi.

Exemple • Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors

$$\delta_{x_0} * T = \tau_{x_0} T$$

• Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors

$$(\partial^\alpha \delta_0) * T = \partial^\alpha T .$$

$\langle \delta_{x_0} * T, \varphi \rangle = \langle T, \check{\delta}_{x_0} * \varphi \rangle$

Mais :

$(\check{\delta}_{x_0} * \varphi)(x) =$

$= \langle \check{\delta}_{x_0}, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle$

$= \langle \delta_{x_0}, y \mapsto \varphi(x+y) \rangle$

$= \varphi(x + x_0) = (\tau_{-x_0} \varphi)(x)$

$\langle T, \tau_{-x_0} \varphi \rangle = \langle \tau_{x_0} T, \varphi \rangle .$

Proposition (Continuité de la convolution)

1) Soit $(T_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ avec $T_n \to T$, et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T_n * S \to T * S$.

2) Soit $(S_n)_n$ une suite de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ avec $S_n \to S$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T * S_n \to T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Démonstration

1) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On veut montrer que

$$\langle T_n, \check{S} * \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \check{S} * \varphi \rangle .$$

Mais $\check{S} * \varphi$ est une fonction fixe dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On veut montrer que

$$\langle T, \check{S}_n * \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \check{S} * \varphi \rangle .$$

Il suffit de montrer qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $\check{S}_n * \varphi \to \check{S} * \varphi$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On sait que les supports de S_n sont des sous-ensembles d'un compact fixe (voir page 60), donc $\exists K$ compact tel que $\operatorname{supp}(\check{S}_n * \varphi) \subset K$, $\forall n$.

Par le Thm 1 p.7, il existe C, k tq

$$|\langle \check{S}_n, \varphi(x-\cdot)\rangle| \leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|\leq k} |\partial^\alpha \varphi(y)|, \quad \text{donc}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |(\check{S}_n * \varphi)(x)| \leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|\leq k} |\partial^\alpha \varphi(y)| < \infty,$$

et de même $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha(\check{S}_n * \varphi)(x)| < \infty$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

$$\partial^\alpha(\check{S}_n * \varphi) = \check{S}_n * (\partial^\alpha \varphi)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $(\check{S}_n * \varphi)(x) \to (\check{S} * \varphi)(x)$, donc le fait que toutes les dérivées soient uniformément bornées implique que la convergence a lieu dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

<u>Remarque</u> Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est fixe, alors $L_T : S \mapsto T * S$ est un opérateur linéaire

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

continu (pour la notion de convergence de suites).

On appelle T le <u>noyau</u> de l'opérateur L_T.

Un tel opérateur L_T est <u>invariant par translations</u> :

$$L_T(\tau_{x_0} S) = T * (\tau_{x_0} S) = \tau_{x_0}(T * S) = \tau_{x_0}(L_T S).$$

On peut montrer que <u>tous</u> les opérateurs linéaires invariants par translations ont cette forme.

Banach Steinhaus $\rightsquigarrow$

$\exists\ C, j, k$ tq

$$|\langle S_n, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in K_j} \sum_{|\alpha|\leq k} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall n.$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{supp}(S_n) \subset K_j, \ \forall n.$$

Chapitre V. Solutions élémentaires

Définition Un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$ est un opérateur $P : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to C^\infty(\mathbb{R}^d)$ de la forme $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$, où $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

Remarque Soit $p := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Alors $P\varphi = p * \varphi, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Un opérateur différentiel est donc un opérateur de convolution. Il est local, c'est-à-dire $(P\varphi)(x)$ ne dépend que des valeurs de φ au voisinage arbitrairement petit de x.

Les opérateurs différentiels sont les seuls opérateurs de convolution ayant cette propriété.

Définition Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Une solution élémentaire de P est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $PE = \delta_0$. $\boxed{/}$

$p * E = \delta_0$

Si on connait une solution élémentaire E de l'opérateur différentiel P, alors on peut résoudre explicitement l'équation différentielle $Pu = f$ pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$:

$u := E * f$ est une solution de $Pu = f$.

$$Pu = p * u = \\ = p * (E * f) = \\ = (p * E) * f = \\ = \delta_0 * f = f.$$

Remarque La question de l'unicité est délicate.

Théorème (Malgrange–Ehrenpreis) Tout opérateur différentiel à coefficients constants non nul a une solution élémentaire. $\boxtimes$

On verra en TD des exemples de solutions élémentaires.