DM II: FONCTIONS À SUPPORT COMPACT, CONVOLUTIONS

À RENDRE PAR COURRIEL AVANT LE 18 MARS 8H00

Exercice 1 (10 points)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Montrer que l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, ainsi que dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

Exercice 2 (10 points)**.** Soit $\Omega :=]0,1[^d \subset \mathbb{R}^d$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \mathrm{e}^{2\pi i \xi_j \cdot x}, \qquad a_j \in \mathbb{C}, \xi_j \in \mathbb{Z}^d$$

est appellée un *polynôme trigonométrique*.

Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C^\infty(\Omega)$.

Indication. Soit P l'ensemble des polynômes trigonométriques. Il faut montrer que, si $u \in C^\infty(\Omega)$, alors $u \in \overline{P}$. Se ramener au cas $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ensuite, penser aux séries de Fourier. $\square$