DM III: NOTION D'UNE DISTRIBUTION

À RENDRE PAR COURRIEL AVANT LE 25 MARS 8H00

Exercice 1. 1) Soit T la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ donnée par

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + x^2) \, \mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et déterminer l'ordre de T.

2) Même question avec

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

3) (a) Montrer que T définie par

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log x \, \mathrm{d}x$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer l'ordre de T. (Indication : On pourra prendre χ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur $[-1, 1]$, supportée dans $[-2, 2]$ et considérer pour tout $n \in \{1, 2, \ldots\}$, les fonctions test $\varphi_n(x) = \chi(x)(1 - \chi)(nx)$).

4) Soit $1 < \gamma < 2$. Montrer que T définie par

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big) \frac{\mathrm{d}x}{x^\gamma}, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$. (Indication : On pourra utiliser la même fonction $\varphi_n(x)$ qu'à la question précédente.)

Exercice 2. 1) Soit T la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ donnée par

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \big(\varphi(t^{-2}, \sin t) - \varphi(0, \sin t)\big) \, \mathrm{d}t, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

(a) Montrer que T est une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que T est d'ordre 1. On pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent.

2) Mêmes questions pour

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^{-\alpha} \Big(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

lorsque $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$. (Indication : On pourra faire un changement de variables en coordonnées polaires).

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $K \subset \Omega$ un compact et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $\varphi : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial_x^\alpha \varphi \in C(I \times \Omega)$ et $\operatorname{supp}(\varphi(t, \cdot)) \subset K$ pour tout $t \in I$. Montrer que $t \mapsto \langle T, \varphi(t, \cdot) \rangle$ est une fonction continue $I \to \mathbb{C}$.