DM IV: SUPPORT, MULTIPLICATION, DÉRIVATION

À RENDRE AU DÉBUT DU TD LE 1ER AVRIL 8H30
(AUCUN REPORT DE LA DATE LIMITE NE SERA POSSIBLE)

Exercice 1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x - x_0)^k T = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$T = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \delta_{x_0}^{(j)}.$$

Exercice 2. 1) Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta(x) = 1$ au voisinage de $x = 0$. Montrer que la formule

$$\langle T_\theta, \varphi \rangle := \left\langle S, x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x} \right\rangle.$$

définit une distribution $T_\theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT_\theta = S$.

2) Soit $\mathcal{A} := \{T_\theta + \lambda\delta_0 : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{A}$ ne dépend pas du choix de la fonction cut-off θ.

3) Montrer que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $xT = S$, autrement dit $T \in \mathcal{A}$ si, et seulement si, $xT = S$.

Exercice 3. Montrer que $(\log|x|)' = \mathrm{vp}(1/x)$. Ensuite, montrer que

$$\left\langle \mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big)', \varphi \right\rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\epsilon} \right).$$

Dans l'exercice suivant, on admet le résultat suivant, qu'on aura démontré au début de la séance le 30 mars :

Proposition. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $T' = 0$ au sens des distributions, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T = \lambda$.* □

Remarque. La relation $T = \lambda$ signifie qu'on peut identifier T à la fonction constante $f(x) = \lambda$, donc $\langle T, \varphi \rangle = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$. Ensuite, résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $xT' + T = 0$, c'est-à-dire trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $xT' + T = 0$.

Exercice 5. Soit $r \in C^\infty(\mathbb{R})$. Déterminer toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $T' + rT = \delta_0$ et $-1 \notin \mathrm{supp}(T)$.