Institut Galilée

Filière M1

2020 – 2021

DISTRIBUTIONS

Jacek Jendrej (CNRS et USPN)

jendrej@math.univ-paris13.fr

(d'après les notes de cours du même titre par prof. Jean-Marc Delort, USPN)

Informations pratiques

Horaires

* CM les mardis 8h30 – 11h45
* TD les jeudis 8h30 – 11h45

(trois séances à Villetaneuse, le reste sur Zoom).

Examen

le 20 avril 2021 après-midi (probablement)

DM

10% de la note finale.

Chapitre I. Espaces de Fréchet

Définition 1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Une *semi-norme* est une fonction $p : X \to [0, \infty[$ ayant les propriétés suivantes:

i) $p(u+v) \leq p(u) + p(v) \qquad \forall u, v \in X$

ii) $p(\lambda u) = |\lambda| p(u) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ u \in X.$ ☐

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $p_1, p_2, \ldots$ une suite de semi-normes

Définition 2. On dit que la suite de semi-normes $(p_j)_j$ est *séparante* si $\forall\ u \in X \setminus \{0\}$ il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_j(u) > 0$. ☐

Définition 3. Soit $p_1, p_2, \ldots$ une suite séparante de semi-normes. On dit qu'un ensemble $\mathcal{U} \subset X$ est *ouvert* si $\forall u \in \mathcal{U}$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ v \in X : \ p_j(v-u) < \varepsilon \text{ pour tout } j \leq j_0 \} \subset \mathcal{U}.$$

Proposition 1. La condition ci-dessus définit une topologie de Hausdorff sur X.

Exercice 1. Démontrer la dernière proposition. ☐

Proposition 2. La fonction $d : X \times X \to [0, \infty[$ définie par
$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(v-u)}{1 + p_j(v-u)}$$
est une distance et induit la topologie déf. précédemment

<u>Démonstration</u> Posons d'abord

$$d_0(u) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(u)}{1+p_j(u)}.$$

On montre que d_0 a les propriétés suivantes :

i) $d_0(u) = 0 \implies u = 0$

ii) $d_0(u+v) \leq d_0(u) + d_0(v), \quad \forall u, v \in X$

La première propriété résulte directement du fait que la famille $(p_j)_j$ est séparante.

Pour montrer ii) il suffit de voir que

$$\frac{p_j(u+v)}{1+p_j(u+v)} \leq \frac{p_j(u)}{1+p_j(u)} + \frac{p_j(v)}{1+p_j(v)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction $f(t) := \frac{t}{1+t}$ est croissante et concave pour $t \geq 0$. Posons $a := p_j(u)$, $b := p_j(v)$, on a donc $p_j(u+v) \leq a+b$ et

$$f(p_j(u+v)) \leq f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$

Les propriétés i) et ii) impliquent facilement que d est une distance.

Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert selon la Déf. 3, et $u \in U$. Soit j_0 et ε donnés par la Déf. 3. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $\varepsilon \leq 1$.

Soit $v \in X$ tel que $d(u,v) < 2^{-j_0-1}\varepsilon$.

La définition de la distance d implique alors

$$\frac{1}{2^j} \frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} < 2^{-j_0-1}\varepsilon \quad , \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, $\forall j \leq j_0$ on a

$$\frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} < \frac{1}{2}\varepsilon \Leftrightarrow (2-\varepsilon)\,p_j(v-u) < \varepsilon,$$

donc $p_j(v-u) < \varepsilon$ pour tout $j \leq j_0$, ce qui implique $v \in U$. Ainsi, la topologie de la Définition 3 est <u>moins fine</u> que la topologie induite par d.

Pour montrer qu'elle est aussi <u>plus fine</u>, il suffit de prouver que pour tout $u \in X$, $\tilde{\varepsilon} > 0$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon \ \ \forall j \leq j_0\} \subset \{v \in X : d(u,v) < \tilde{\varepsilon}\}.$$

Pour cela, il suffit de prendre $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-j_0} < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$, et $\varepsilon < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$.

Puisque X est un espace métrique, il est clair ce que signifient la convergence de suites et la notion d'une suite de Cauchy.

<u>Lemme 1.</u> Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de X :

1) converge vers u si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} p_j(u_n - u) = 0, \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}^*.$$

2) est une suite de Cauchy si et seulement si

$\forall \varepsilon > 0,\ j \in \mathbb{N}^*\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p_j(u_m - u_n) < \varepsilon \quad \text{pour tous } m, n \geq N_0$$

$\boxtimes$

Si $(p_j)_j$ est une suite de semi-normes, alors en remplaçant p_j par $\max_{l \leq j} p_l$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $(p_j)_j$ est une suite <u>croissante</u>, c'est-à-dire

$$p_j(u) \leq p_{j+1}(u) \quad \text{pour tous } u \in X \text{ et } j \in \mathbb{N}^*.$$

<u>Proposition 2.</u> Soit X un espace vectoriel, muni d'une famille croissante de semi-normes $(p_j)_j$. Une forme linéaire $T : X \to \mathbb{C}$ est continue si, et seulement si, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $|Tu| \leq C p_j(u)$, $\forall u \in X$.

<u>Démonstration</u>

Soit $T : X \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que

$$|Tu| \leq C p_j(u), \quad \forall u \in X,$$

et soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers 0.

En particulier, $p_j(u_n) \to 0$ (Voir Lemme 1) donc $Tu_n \to 0$, autrement dit T est continue en $u=0$. La linéarité implique que T est continue.

Inversement, supposons que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_j \in X$ tel que

$$|Tu_j| > j\, p_j(u_j).$$

Considérons la suite $v_j := \dfrac{u_j}{j\, p_j(u_j)}$.

Alors $p_j(v_j) = \dfrac{1}{j}$, donc $v_j \to 0$ dans X, mais $|Tv_j| > 1$ et T n'est pas continue.

<u>Définition</u> Soit X un espace vectoriel, muni d'une topologie induite par une famille séparante de semi-normes. On dit que X est un <u>espace de Fréchet</u> si X, vu comme un espace métrique, est complet.

<u>Exemples</u>

1) Si X est un espace de Banach, alors X est aussi un espace de Fréchet.
En effet, il suffit de poser $p_1(u) := \|u\|_X$ et $p_j(u) = 0$ pour tout $j \geq 2$.

2) Soit $X := \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ l'espace des suites de nombres complexes $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots)$ et posons
$$p_j(u) := |u^{(j)}|$$
Montrons que X est un espace de Fréchet.
Soit $(u_0, u_1, \dots)$ une suite de Cauchy dans X. Par le Lemme 1,
pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_0^{(j)}, u_1^{(j)}, \dots)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc elle converge vers $u^{(j)} \in \mathbb{C}$.
Encore une fois par le Lemme, $u_n \to u$ dans X.

3) Soit $C(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ et posons

$$p_j(u) := \sup_{|x| \leq j} |u(x)|.$$

Alors $C(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Fréchet.

4) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des fonctions mesurables $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telles que $\int_K |u(x)|^p \, dx < \infty$ pour tout $K \subset \mathbb{R}^d$ compact $\left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in K} |u(x)| \text{ si } p = \infty \right)$.

Posons $$p_j(u) := \left(\int_{|x| \leq j} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est alors un espace de Fréchet.

$\boxtimes$

<u>Théorème 1.</u> Soit X un espace de Fréchet, dont la topologie est donnée par une suite croissante de semi-normes $(p_j)_j$, et soit $(T_n)_n$ une suite de formes linéaires continues $T_n : X \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_n |T_n u| < \infty, \quad \forall u \in X.$$

Alors il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$|T_n u| \leq C p_j(u), \quad \forall n \in \mathbb{N}, u \in X.$$

<u>Démonstration</u> La preuve est basée sur le théorème de Baire, et ressemble beaucoup à la preuve habituelle du théorème de Banach-Steinhaus.

Considérons les ensembles

$$A_m := \{ u \in X : \sup_n |T_n u| \leq m \}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Par l'hypothèse, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} A_m = X$.

Chaque A_m, étant une intersection d'ensembles fermés, est un ensemble fermé.

Par le théorème de Baire, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que A_m est d'intérieur non vide.

Il existe donc $u \in X$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon \} \subset A_m.$$

On observe que A_m est convexe et symétrique par rapport à 0, donc

$$p_j(v-u) < \varepsilon \Rightarrow p_j(u-v) = p_j((2u-v)-u) < \varepsilon \Rightarrow 2u - v \in A_m$$
$$\Rightarrow v - 2u \in A_m,$$

donc $\frac{1}{2}(v + (v-2u)) = v - u \in A_m$,

autrement dit

$$p_j(w) < \varepsilon \Rightarrow w \in A_m \Rightarrow \sup_n |T_n w| \leq m,$$

et on obtient $\sup_n |T_n w| \leq \frac{m}{\varepsilon} p_j(w)$. $\square$

Chapitre II Espaces de fonctions différentiables

1. Les espaces $C^k(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert. On pose

$$C(\Omega) = C^0(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ u \text{ est continue sur } \Omega \}$$

$$C^1(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ u \text{ admet des dérivées partielles d'ordre } 1, \text{ continues sur } \Omega \}$$

$$:= \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ \forall i = 1, \dots, d, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existe et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega) \}$$

Par récurrence, on peut définir

$$C^k(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ \forall i = 1 \dots d, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existe et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega) \}$$

On pose $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.

<u>Exercise 1.</u> Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
De plus, si $u, v \in C^k(\Omega)$, alors $uv \in C^k(\Omega)$.

<u>Définition / Notation</u> Un <u>multi-indice</u> est un élément $\alpha \in \mathbb{N}^d$
$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. On pose

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d \qquad (\underline{\text{longueur}} \text{ de } \alpha),$$

$$\alpha! := (\alpha_1 !) \dots (\alpha_d !)$$

$$\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on écrit

$$\alpha \geq \beta \iff \beta \leq \alpha \iff \forall i = 1, \dots, d \quad \beta_i \leq \alpha_i$$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $\alpha \geq \beta$, on définit
$\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_d - \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ et on pose

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} = \prod_{i=1}^{d} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$$ ("coefficient binomial")

<u>Exercice 2.</u> Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $u \in C^k(\Omega)$,
$0 \leq l \leq k$ et $i_j \in \{1, \ldots, d\}$ pour $j = 1, \ldots, l$.
Pour $m \in \{1, \ldots, d\}$, posons

$$\alpha_m := \# \{ j : i_j = m \},$$

et soit $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

Montrer que

* $|\alpha| = l$
* $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} u$ existe et est continue sur Ω
* $\partial^\alpha u$ existe et est continue sur Ω
* $\frac{\partial}{\partial x_{i_l}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{l-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} u = \partial^\alpha u$.

<u>Exercice 3.</u> (Formule de Newton)

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on pose $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.

Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta},$$

où la somme est étendue sur l'ensemble de tous les multi-indices $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $\beta \leq \alpha$.

Exercise 4. (Formule de Leibniz)

Soit $u, v \in C^k(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$.

Alors $\displaystyle \partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v)$.

$\boxtimes$

Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ la norme euclidienne de x.

Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, on pose

$$d(x, F) := \inf_{y \in F} |x - y|.$$

Lemme 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,;\, |x| \leq j \text{ et } d(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{j} \right\}.$$

Alors

i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, K_j est un sous-ensemble compact de Ω et $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$,

ii) $\displaystyle \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \mathring{K}_j = \Omega$

iii) Si $K \subset \Omega$ est un ensemble compact, alors il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_j$

Remarque Une suite de sous-ensembles compacts de Ω vérifiant les conditions i), ii) et iii) est appelée une suite exhaustive de compacts de Ω

Exercice 5. Démontrer le Lemme 1.

$\boxtimes$

Par la suite, $(K_j)_j$ est toujours la suite exhaustive de compacts définie dans le Lemme 1.

<u>Définition</u> (Semi-normes et pseudo-boules)
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $u \in C^k(\Omega)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$p_j^k(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha u(x)| .$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$V_j^k(\varepsilon) := \{ u \in C^k(\Omega) \; ; \; p_j^k(u) < \varepsilon \}$$

(pseudo-boule de centre 0 et de rayon ε).

<u>Définition</u> (Topologie sur $C^k(\Omega)$)
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} \subset C^k(\Omega)$. On dit que $\mathcal{U}$ est un ensemble <u>ouvert</u> dans $C^k(\Omega)$ si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$u + V_j^k(\varepsilon) := \{ u + v \; ; \; v \in V_j^k(\varepsilon) \} \subset \mathcal{U} .$$

$\boxtimes$

Pour montrer que cette condition définit une topologie, il suffit, comme on l'a vu au Chapitre I, que la famille $(p_j^k)_j$ soit séparante, ce qui est vrai.

Définition (Topologie sur $C^\infty(\Omega)$)

Soit $\mathcal{U} \subset C^\infty(\Omega)$. On dit que $\mathcal{U}$ est un ensemble **ouvert** dans $C^\infty(\Omega)$ si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ u + v \,;\; v \in C^\infty(\Omega) \cap V_j^k(\varepsilon) \} \subset \mathcal{U}.$$

Remarque La topologie est définie ici par la famille **dénombrable** de semi-normes (p_j^k), indexée par $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On est donc toujours dans le cadre du Chapitre I.

Exercice 6. Montrer que c'est la moins fine topologie sur $C^\infty(\Omega)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'injection $C^\infty(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ est continue.

Proposition Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^k(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^k(\Omega)$, pour la topologie ci-dessus,

ii) $\forall K \subset \Omega$ compact et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ uniformément sur K.

Démonstration. Rappelons que, par le Lemme 1 du Chapitre I, $u_n \to u$ si et seulement si

$$\lim_{n \to \infty} p_j^k(u_n - u) = 0, \qquad \text{pour tout } j.$$

En remplaçant u_n par $u_n - u$, on se ramène au cas $u = 0$.

i) ⟹ ii) Soit j tel que $K \subset K_j$.

Alors $\lim_{n\to\infty} p_j^k(u_n)=0 \Rightarrow \partial^\alpha u_n \to 0$ unif. sur K_j, donc aussi sur K, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq k$.

ii) ⟹ i) K_j est un compact, donc
$$\lim_{n\to\infty} p_j^k(u_n) = 0.$$
□

Proposition Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^\infty(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^\infty(\Omega)$, pour la topologie ci-dessus,

ii) $\forall K \subset \Omega$ compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$,
$$\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u \quad \text{uniformément sur } \Omega.$$

Exercice 7. Démontrer cette proposition. ☒

Théorème 1. Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$
$C^k(\Omega)$ est un espace de Fréchet. ☒

Avant de démontrer ce théorème, rappelons le fait suivant.

Lemme Si $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1((a,b))$ telle que $f_n \to f$ et $f_n' \to g$ uniformément sur (a,b), où f et g sont des fonctions bornées continues, alors $f \in C^1((a,b))$ et $f' = g$.

Démonstration Soit $c \in (a,b)$ et
$$\tilde{f}(x) := f(c) + \int_c^x g(y)dy, \quad \forall x \in (a,b)$$

On sait que $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(y)dy$.

On en déduit que $f_n(x) \to \tilde{f}(x)$, donc $f = \tilde{f}$. □

On obtient facilement une version en dimension d :

<u>Lemme</u> Soit $J := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1(J)$ telle que $f_n \to f$ et $\partial_{x_i} f_n \to g_i$ uniformément sur J, où f et g_i sont des fonctions bornées continues, alors $f \in C^1(J)$ et $\partial_{x_i} f = g_i$.

<u>Démonstration</u> En fixant toutes les variables sauf une et en appliquant le lemme précédent, on trouve que $\partial_{x_i} f = g_i$.

<u>Corollaire</u> Soit $J := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^k(J)$ telle que $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ uniformément sur J, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq k$, où g_α sont des fonctions bornées continues, alors $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C^k(J)$ et $\partial^\alpha f = g_\alpha$ $\forall |\alpha| \leq k$

<u>Démonstration</u> Récurrence par rapport à k.

Pour $k = 1$ c'est le dernier lemme.

Soit $k \geq 2$. On obtient, par l'hypothèse de récurrence, $g_i := \lim_{n\to\infty} \partial_{x_i} f_n \in C^{k-1}(J)$.

Comme $\partial_{x_i} f = g_i$, on obtient la conclusion.

<u>Démonstration du Théorème 1.</u>

Considérons d'abord le cas $k \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.

Par le Lemme 1 du Chapitre I, on voit que $\partial^\alpha u_n |_{\mathring{K}_j}$ est une suite de Cauchy pour la norme sup, $\forall |\alpha| \leq k$ et $i \in \mathbb{N}^*$.

On déduit du Corollaire que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe $v_j \in C^k(\mathring{K}_j)$ tq

$$\partial^\alpha u_n \longrightarrow \partial^\alpha v_j \quad \text{unif. sur} \quad \mathring{K}_j .$$

On définit une fonction $v : \Omega \to \mathbb{C}$ par la condition $v(x) = v_j(x)$ si $x \in \mathring{K}_j$.

Alors v est bien défini, $v \in C^k(\Omega)$ et $u_n \longrightarrow v$ dans $C^k(\Omega)$.

La preuve dans le cas $C^\infty(\Omega)$ est similaire.

2. Fonctions de classe C^k à support compact.

<u>Définition</u> Soit $u \in C(\Omega)$. On appelle le <u>support</u> de u l'ensemble

$$\operatorname{supp} u := \Omega \cap F \quad \text{où} \quad F := \overline{\{x \in \Omega \,;\, u(x) \neq 0\}}$$ ◪

Comme F est un fermé de $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{supp} u$ est un fermé de Ω. Il est caractérisé par

$x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u \Leftrightarrow x_0 \in \Omega$ et $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que
$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow u(x) = 0.$$

<u>Proposition</u> L'ensemble $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ est le plus grand ouvert sur lequel la fonction u soit nulle.

<u>Démonstration</u> Soit U un ouvert tel que $u(x) = 0$ pour tout $x \in U$, et soit $x_0 \in U$.
Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow x \in U \Rightarrow u(x) = 0$, donc $x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$.
Cela signifie que $U \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. □

<u>Définition</u> Soit $K \subset \Omega$ un compact, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
On note $C^k_K(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\, \operatorname{supp} u \subset K\}$
l'espace des fonctions C^k à support inclus dans K.

<u>Remarque</u> On voit que $C^\infty_K(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k_K(\Omega)$.

<u>Définition</u> (semi-normes)
Si $K \subset \Omega$ compact, $k \in \mathbb{N}$ et $u \in C^k_K(\Omega)$,
on pose $$p^k_K(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)|.$$

<u>Proposition</u> 1) Si $K \subset \Omega$ compact et $k \in \mathbb{N}$, alors $C_K^k(\Omega)$, muni de la norme p_K^k, est un espace de Banach.

2) Si $K \subset \Omega$ compact, alors $C_K^\infty(\Omega)$, muni de la famille des semi-normes $(p_K^k)_k$, est un espace de Fréchet.

<u>Démonstration</u> 1) $C_K^k(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $C^k(\Omega)$, donc il suffit de vérifier que p_K^k induit la même topologie que la famille des semi-normes $(p_j^k)_j$.

Mais d'un côté, il est clair que $p_j^k(u) \geq p_K^k(u)$ si j est tel que $K \subset K_j$.

D'un autre côté, $p_j^k(u) \leq p_K^k(u)$ pour tout j, si $\operatorname{supp} u \subset K$.

2) La preuve est similaire, et laissée comme exercice.

<u>Exercice</u> Démontrer la partie 2).

__Remarque__ Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et si on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$\tilde{u}(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$ et $\tilde{u}(x) = 0$ si $x \notin \Omega$,

alors $\tilde{u} \in C^k(\mathbb{R}^d)$. En prolongeant par zéro une fonction de $C^k_K(\Omega)$, on obtient une fonction de $C^k_K(\mathbb{R}^d)$.

__Définition__ Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note

$$C_0^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\ \text{supp } u \text{ est un compact de } \mathbb{R}^d \text{ inclus dans } \Omega\}.$$

On a donc
$$C_0^k(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset \Omega}} C_K^k(\Omega).$$

Si $k = \infty$, on note aussi $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$. $\boxtimes$

On voit immédiatement que $C_0^k(\Omega)$ est un espace vectoriel.

__Remarque__ Dans la littérature, on considère souvent $C_0^k(\Omega)$ muni de la "topologie inductive", mais nous n'allons pas le faire ici.

__Exemple__ Trouver une fonction $u \in C_0^1(\mathbb{R})$ qui est quadratique par morceaux.

3. Approximation par convolution

Il n'est pas évident si l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ contient des fonctions autres que la fonction identiquement nulle. Pour examiner cette question, on commence par le lemme suivant.

Lemme 1 Il existe une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \rho = \overline{B(0,1)}$,

$\rho(x) > 0$ pour tout x tq $|x|<1$, et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$

Démonstration Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $\tilde{\rho}(x) := f(1-|x|^2)$.

On a $\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} \tilde{\rho} = \overline{B(0,1)}$ et $\tilde{\rho}(x) > 0$ pour tout x tq $|x|<1$.

Enfin, posons
$$\rho(x) := \frac{\tilde{\rho}(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}(y)dy}.$$
□

Si $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) f(y)\, dy \qquad (*)$$

Observons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto \varphi(x-y)$ est une fonction continue à support compact, donc l'intégrale $(*)$ converge.

Lemme 2. 1) Si $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C(\mathbb{R}^d)$.

2) Si $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial_{x_i}(\varphi * f) = (\partial_{x_i}\varphi) * f, \qquad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

3) Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\varphi \in C^k_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi * f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ |\alpha| \leq k.$$

Démonstration

1) Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < \delta < 1$ et $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ tq $|\tilde{x} - x| < \delta$

Soit $R \in \mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R)$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_0 > 0$ tq $\delta \leq \delta_0$ impliqu

$\operatorname{supp} \varphi(\tilde{x} - \cdot) \subset B(0, R + |x| + 1)$, et

$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)| \leq \varepsilon$ donc

$$|(\varphi * f)(\tilde{x}) - (\varphi * f)(x)| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)\big) f(y)\, dy \right|$$

$$= \left| \int_{B(0, R+|x|+1)} \big(\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)\big) f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \int_{B(0, R+|x|+1)} |\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)|\, |f(y)|\, dy$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0, R+|x|+1)} |f(y)|\, dy,$$

ce qui prouve la continuité de $\varphi * f$.

2) Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. D'après 1), $(\partial_{x_i} \varphi) * f$ est une fonction continue.

Montrons que $\partial_{x_i}(\varphi * f)(x)$ existe et est égale à $((\partial_{x_i}\varphi) * f)(x)$.

Soit $e_i := (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ème position}}}{1}, 0, \dots)$. Il faut vérifier que

$$\left| (\varphi * f)(x + te_i) - (\varphi * f)(x) - t((\partial_{x_i}\varphi) * f)(x) \right| = o(t)$$

quand $t \to 0$.

Pour cela, on exploite la continuité uniforme de $\partial_{x_i}\varphi$, de manière suivante : montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ tq $\delta \le \delta_0$ et $|t| \le \delta_0$ impliquent

$$|\varphi(x + te_i) - \varphi(x) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| \leqslant \varepsilon |t|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En considérant séparément les parties réelle et imaginaire on peut supposer que φ est à valeurs réelles.

Soit $\delta_0 > 0$ tq

$$|\tilde{x} - x| \le \delta_0 \Rightarrow |\partial_{x_i}\varphi(\tilde{x}) - \partial_{x_i}\varphi(x)| \le \varepsilon .$$

L'existence de δ_0 résulte de l'uniforme continuité de ∂_{x_i}

Par le théorème des accroissements finis,

$\exists\, \tilde{t}$ tq $|\tilde{t}| \le |t|$ et

$$\varphi(x + te_i) - \varphi(x) = t\,\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t} e_i), \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi(x + te_i) - \varphi(x) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| &= \\
= |t\,\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| & \\
\leqslant |t|\,|\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i) - \partial_{x_i}\varphi(x)| &\le \varepsilon |t| .
\end{aligned}$$

On conclut maintenant comme dans la partie 1) :

$$|(\varphi*f)(x+te_j)-(\varphi*f)(x)-t((\partial_{x_j}\varphi)*f)(x)| =$$

$$=\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(\varphi(x+te_j-y)-\varphi(x-y)-t\partial_{x_j}\varphi(x-y)\right)f(y)\,dy\right|$$

$$=\left|\int_{B(0,R+|x|+1)}\left(\varphi(x+te_j-y)-\varphi(x-y)-t\partial_{x_j}\varphi(x-y)\right)f(y)\,dy\right|=o($$

3) Récurrence par rapport à k.

__Remarque__ On dit qu'une fonction mesurable $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ est à support compact s'il existe $K\subset\Omega$ compact tq $f(x)=0$ pour presque tout $x\in\Omega\setminus K$. On voit que, si f est à support compact, alors $\varphi*f$ également.

__Notation__ Soit $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les conditions du Lemme 1. Si $\varepsilon>0$, on pose $\rho_\varepsilon(x):=\frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Alors $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon=\overline{B(0,\varepsilon)}$ et $\int_{\mathbb{R}^d}\rho_\varepsilon(x)\,dx=1$.

__Proposition 1.__ Si u est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, à support compact, alors $\rho_\varepsilon*u\to u$ uniformément, quand $\varepsilon\to0$.

__Démonstration__

Soit $\delta>0$. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon_0>0$ tel que $|(\rho_\varepsilon*u)(x)-u(x)|\leq\delta$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et $\varepsilon\leq\varepsilon_0$.

La fonction u est continue à support compact, donc elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que
$$|x-y| \leq \varepsilon_0 \implies |u(x)-u(y)| \leq \delta.$$
Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. On trouve :

$$|(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)dy - u(x) \right|$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)u(x)dy \right|$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,|u(y)-u(x)|\,dy \leq$$
$$\leq \sup_{|y-x|\leq\varepsilon} |u(y)-u(x)| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)dy \leq \delta.$$

<u>Corollaire 1.</u> Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) \longrightarrow \partial^\alpha u$ uniformément lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

<u>Preuve</u> Par le Lemme 2, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = \rho_\varepsilon * (\partial^\alpha u)$, donc il suffit d'utiliser la Proposition 1, avec $\partial^\alpha u$ au lieu de u.

Théorème 1. 1) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \rho_\varepsilon * u - u \|_{L^p} = 0.$$

2) L'ensemble $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration

Étape 1. On montre que, $\forall v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$,

$$\| \rho_\varepsilon * v \|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}.$$

En effet,

$$\|\rho_\varepsilon * v\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, v(y)\, dy \right|^p dx.$$

Par l'inégalité de Hölder, pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, v(y)\, dy \right|^p = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)^{1/p'} \rho_\varepsilon(x-y)^{1/p}\, v(y)\, dy \right|^p$$

$$\leq \underbrace{\|\rho_\varepsilon(x-.)^{1/p'}\|_{L^{p'}}^p}_{=1} \| \rho_\varepsilon(x-.)^{1/p} v \|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\| \rho_\varepsilon * v \|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, |v(y)|^p\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(|v(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, dx}_{=1} \Big) dy = \|v\|_{L^p}^p.$$

Remarque 1) L'inégalité $\left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, v(y)\, dy \right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p d$

peut être aussi obtenue facilement

de l'inégalité de Jensen. (Exercice).

2) L'inégalité $\|\rho * v\|_{L^p} \leq \|\rho\|_{L^1} \|v\|_{L^p}$ est un cas particulier de l'inégalité de Young et un cas particulier de l'inégalité de Minkowski.

<u>Exercice</u> Expliquer la dernière Remarque.

<u>Étape 2.</u> Soit $\delta > 0$. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ implique

$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \leq \delta.$$

D'après le cours sur la théorie de la mesure, on sait qu'il existe v, une fonction continue à support compact, telle que $\|u - v\|_{L^p} \leq \frac{1}{3}\delta$.

La Proposition implique qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 \implies \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} \leq \frac{1}{3}\delta.$$

En utilisant l'étape 1, on obtient

$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \leq \|\rho_\varepsilon * u - \rho_\varepsilon * v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} + \|v - u\|_{L^p}$$

$$= \|\rho_\varepsilon * (u - v)\|_{L^p} + \|u - v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p}$$

$$\leq 2\|u - v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} \leq \delta.$$

<u>Etape 3.</u> Dans l'étape 2, on a vu que

$$\|\rho_\varepsilon * v - u\|_{L^p} \leq \frac{2}{3}\delta.$$

Mais $\rho_\varepsilon * v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et δ est arbitraire > 0 donc $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

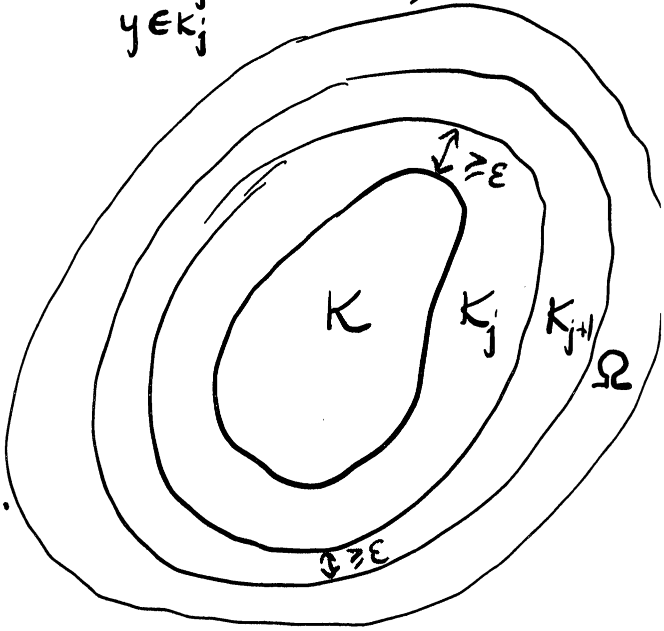
À présent, on formulera et démontrera des résultats analogues dans le cas d'un domaine général $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

Théorème 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. Il existe une fonction $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\eta(x) = 1$ pour tout $x \in K$ et $0 \leq \eta(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$.

Démonstration

Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Soit j tel que $K \subset \mathring{K}_j$, et posons

$$\varepsilon := \min\left(\inf_{\substack{x \in K \\ y \notin K_j}} |x-y|, \inf_{\substack{x \notin K_{j+1} \\ y \in K_j}} |x-y| \right)$$



$$\eta(x) := (\rho_\varepsilon * \mathbb{1}_{K_j})(x),$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

On sait déjà que $\eta \in C^\infty(\Omega)$.

On va montrer que $\operatorname{supp} \eta \subset K_{j+1}$. En effet, soit $x \in \Omega \setminus K_{j+1}$. On a

$$\eta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) \mathbb{1}_{K_j}(y) dy = \int_{K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy \qquad (*)$$

Mais $|x-y| \geq \varepsilon$ pour tout $y \in K_j$, donc $\rho_\varepsilon(x-y) = 0$, donc $\eta(x) = 0$.

Par la définition de $C_0^\infty(\Omega)$, on conclut que $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

La fonction ρ_ε est positive, d'intégrale 1, donc $(*)$ implique aussi $0 \leq \eta(x) \leq 1$. $\forall x \in \Omega$.

Enfin, si $x \in K$, alors

$$\eta(x) = \int_{K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

$$= 1 - \int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Par le même argument que tout à l'heure,

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0$, donc $\eta(x) = 1$.

<u>Corollaire 2.</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω.
Il existe une suite de fonctions $(\eta_j)_j$ telles que $\eta_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta_j(x) = 1$ pour tout $x \in K_j$, $\operatorname{supp} \eta_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $0 \leq \eta_j(x) \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$

<u>Démonstration</u> On applique le théorème précédent avec $\mathring{K}_{j+1}$ à la place de Ω,
et K_j à la place de K.

<u>Théorème 3.</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$

2) Pour tout $p \in [1, \infty[$, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^p_{loc}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> 1) Soit $u \in C^k(\Omega)$ et $(\eta_j)_j$ la suite trouvée dans le Corollaire 2.

Il est clair que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ $\eta_j u \in C_0^k(\Omega)$ et $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j u = u$ dans $C^k(\Omega)$

Mais, pour $j \in \mathbb{N}^*$ donné, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \in C_0^\infty(\Omega)$, cf. la preuve du Théorème 2.

Par le Corollaire 1, $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \longrightarrow \eta_j u$ uniformément avec toutes les dérivées d'ordre $\leq k$, en particulier dans $C^k(\Omega)$, donc $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ donc $u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ également.

2) Si $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, alors $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j u = u$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$ donc il suffit de montrer que $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$

Mais, pour $j \in \mathbb{N}^*$ donné, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Par le Théorème 1, $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \longrightarrow \eta_j u$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, donc aussi dans $L^p_{loc}(\Omega)$, donc $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.

<u>Exercice</u> Traiter le cas de l'espace $L^p(\Omega)$.

<u>Remarque</u> La famille (ρ_ε), lorsque $\varepsilon \to 0$, est un exemple d'une approximation de l'identité.

Partitions de l'unité

Théorème 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $(\omega_j)_j$ une famille d'ouverts telles que

i) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j$

ii) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\omega_j} \subset \Omega$ compact,

iii) $\forall x \in \Omega$, $\exists\, V$ ouvert tq $x \in V$ et l'ensemble $\{ j \in \mathbb{N}^* : V \cap \omega_j \neq \emptyset \}$ est fini.

Alors il existe des fonctions $\chi_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, telles que $0 \leq \chi_j(x) \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$.

Démonstration

Étape 1. On montre qu'il existe une famille $(\omega_j')_j$ d'ouverts tels que

•) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$,

•) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j'$.

On construit $\omega_1', \omega_2', \dots$ un par un, de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites:

$*$ $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$ pour $j = 1, \dots, m-1$

$*$ $\left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \omega_j' \right) \cup \left(\bigcup_{j=m}^{\infty} \omega_j \right) = \Omega$.

Pour $m = 1$, cela est vrai.

Supposons, que $\omega_1', \dots, \omega_{m-1}'$ sont construits.

Soit $\Omega_m := \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \omega_j' \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} \omega_j \right)$.

C'est un ensemble ouvert et $\Omega_m \cup \omega_m = \Omega$.
Soit $F_m := \Omega \setminus \Omega_m$. C'est un ensemble fermé dans Ω et vérifiant $F_m \subset \omega_m$.
Par hypothèse, $\overline{\omega_m}$ est un compact, donc F_m aussi.
Il existe alors ω_m' ouvert tel que

$$F_m \subset \omega_m' \subset \overline{\omega_m'} \subset \omega_m.$$

On a $\Omega = F_m \cup \Omega_m \subset \omega_m' \cup \Omega_m$, ce qui prouve l'hérédité.

Il reste à vérifier que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j'$.

Or, si $x \in \Omega$, il existe, d'après l'hypothèse iii), N tel que $x \notin \omega_j$ si $j > N$, donc $x \notin \bigcup_{j=N+1}^{\infty} \omega_j$.
Puisque $\Omega = \left(\bigcup_{j=1}^{N} \omega_j'\right) \cup \left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} \omega_j\right)$, $x \in \bigcup_{j=1}^{N} \omega_j'$.

<u>Étape 2</u>. Par le Corollaire 2, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction $\theta_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\theta_j = 1$ sur $\overline{\omega_j'}$.

Posons $\theta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x)$.

Pour tout $x \in \Omega$, c'est une somme finie sur un voisinage de x, donc de classe C^∞ sur ce voisinage.
Aussi, $\theta(x) \geq 1$ pour tout $x \in \Omega$.
On définit $\chi_j := \theta_j / \theta$.

On termine ce chapitre par un autre résultat du même type.

Théorème 5. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $(\omega_j)_{j=1\dots m}$ un recouvrement ouvert fini de K par des ouvert bornés. Alors il existe $\chi_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^m \chi_j(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\sum_{j=1}^m \chi_j = 1$ sur K.

Étape 1. On montre qu'il existe une famille $(\omega_j')_{j=1}^m$ d'ouverts tels que

•) $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$, $\forall j = 1, \dots, m$

•) $K \subset \bigcup_{j=1}^m \omega_j'$.

Exercice Faire la Étape 1.

Étape 2. Soit $\theta_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\theta_j = 1$ sur ω_j', $\theta := \sum_{j=1}^m \theta_j$,

donc $\theta(x) \geq 1$ sur $\bigcup_{j=1}^m \omega_j'$.

Soit $\chi \in C_0^\infty\left(\bigcup_{j=1}^m \omega_j\right)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ sur K.

On pose
$$\chi_j(x) := \begin{cases} \dfrac{\chi(x)\theta_j(x)}{\theta(x)} & \text{si } x \in \bigcup_{j=1}^m \omega_j' \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{j=1}^m \omega_j'. \end{cases}$$

$\square$

Remarque

Il peut être instructif de comparer le Théorème 2. avec le résultat suivant du cours de topologie.

Lemme d'Urysohn Si Ω un espace de Hausdorff et $K \subset \Omega$ compact, alors il existe une fonction $\eta \in C_c(\Omega)$ telle que $\eta(x) = 1$ pour tout $x \in K$. $\boxtimes$

D'autres résultats de ce chapitre ont également leur "cousins" en topologie, par exemple on a l'analogue suivant du Théorème 5 :

Théorème Soit Ω un espace de Hausdorff localement compact, $K \subset \Omega$ compact et $(\omega_j)_{j=1\dots m}$ un recouvrement ouvert fini de K par des ouvert bornés. Alors il existe $\chi_j \in C_0(\omega_j)$, $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^m \chi_j(x) \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$ et $\sum_{j=1}^m \chi_j = 1$ sur K. $\boxtimes$

Pour en savoir plus sur ces résultats, on pourra consulter par exemple le Chapitre 2 du livre de Rudin "Analyse réelle et complexe".

Chapitre III. Distributions

1. Définition des distributions

Définition 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert.
Une distribution T sur Ω est
une forme linéaire $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$
$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$
telle que pour tout $K \subset \Omega$ compact
$T|_{C_K^\infty(\Omega)} : C_K^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des distributions sur Ω est un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$).

Notation On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Proposition 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) T est une distribution sur Ω

ii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et pour toute suite $(\varphi_n)_n$ de $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant

a) il existe $K \subset \Omega$ compact de Ω avec $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pour tout n

b) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \varphi_n \to 0$ uniformément

on a $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$.

iii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et
$\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ on a
$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Démonstration i) $\Leftrightarrow$ ii) résulte de la définition de la convergeance dans $C_K^\infty(\Omega)$.

i) $\Leftrightarrow$ iii) On utilise la Proposition 2. du Chapitre I, page 4.

Remarque Dans iii), k et C dépendent de K ! $\square$

Définition 2. (distributions d'ordre $\leq k$)

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à $k \in \mathbb{N}$ si T s'étend en une forme linéaire $\tilde{T} : C_0^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ tq $\forall K \subset \Omega$ compact, $\tilde{T}\big|_{C_K^k(\Omega)} : C_K^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue.

Exercice 1. 1) Montrer que l'ensemble des distributions d'ordre $\leq k$ est un espace vectoriel.

2) Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre $\leq k$ si, et seulement si,

$\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C > 0$ tel que

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Comparer avec la proposition ci-dessus.

Notation 1) On note $\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω d'ordre $\leq k$.

2) On note $\mathcal{D}'^F(\Omega) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$

l'espace des distributions d'ordre fini.

<u>Définition 3.</u> On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre (exactement) $k \in \mathbb{N}^*$ si $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega) \setminus \mathcal{D}'^{(k-1)}(\Omega)$.

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre (exactement) 0 si $T \in \mathcal{D}'^{(0)}(\Omega)$.

2. Exemples de distributions

1) <u>Fonctions localement intégrables.</u>

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on pose

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

Si $K \subset \Omega$ compact et $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_K f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq \|\mathbb{1}_K f\|_{L^1} \times \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

donc T_f est une distribution d'ordre zéro sur Ω.

Considérons l'application $\Phi : L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ donnée par $\Phi(f) := T_f$.

Alors Φ est une application linéaire injective.

En effet, soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tq $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Considérons η_j, cf. la démonstration du Théorème 3.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixe, on a

$$(\rho_\varepsilon * (\eta_j f))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,\eta_j(y) f(y)\,dy.$$

Comme $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)\,\eta_j(y)$ est un élément de $C_0^\infty(\Omega)$, on a $\rho_\varepsilon * (\eta_j f) = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Par le Théorème 1, $\rho_\varepsilon * (\eta_j f) \to \eta_j f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ quand $\varepsilon \to 0$, donc $\eta_j f = 0$ presque partout. En particulier, $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in K_j$. Comme $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.

La linéarité de Φ est claire.

On voit que T_f est une distribution d'ordre 0. En effet, si $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_K f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \left(\int_K |f(x)|dx \right) \left(\sup_{x\in K} |\varphi(x)| \right)$$

et on applique le résultat de l'Exercice 1.

2) Masses de Dirac

Soit $x_0 \in \Omega$. On définit δ_{x_0} par

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle := \varphi(x_0), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors δ_{x_0} est une distribution d'ordre 0 sur Ω, appelée la masse de Dirac en x_0.

Exercice Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

3) <u>Mesures</u> Si μ est une mesure borélienne positive sur Ω telle que $\mu(K)<\infty$ pour tout compact $K\subset\Omega$, alors on peut lui associer la distribution T_μ définie par

$$\langle T_\mu, \varphi\rangle := \int_\Omega \varphi(x)\,\mu(dx), \quad \forall \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Par le même argument que dans 1), on voit que T_μ est d'ordre 0.

S'il existe une fonction $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\mu(A)=\int_A f(x)\,dx, \quad \forall A\subset\Omega \text{ borélien, alors}$$

on dit que f est la <u>densité</u> de la mesure μ.

On voit que, si μ a la densité f, alors $T_\mu = T_f$, où T_f est définie dans le 1er exemple.

On remarque que, si $\mu=\delta_{x_0}$ est la mesure "masse de Dirac", alors $T_\mu = T_{\delta_{x_0}} = \delta_{x_0}$, où la distribution δ_{x_0} a été définie dans le 2ème exemple.

<u>Exercice</u> Examiner le cas des mesures complexes.

4) Dérivées de la masse de Dirac

Soit $\alpha := (\alpha_1 \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $x_0 \in \Omega$.

On note $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ ou $\delta_{x_0}^{(\alpha)}$ la distribution définie par

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

Proposition 2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ est une distribution d'ordre $|\alpha|$.

Démonstration Il est clair que $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ est une distribution d'ordre $\leq |\alpha|$.

Supposons qu'elle est d'ordre $< |\alpha|$.

Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\partial^\alpha \theta(0) \neq 0$.

Une telle fonction existe, on peut prendre par exemple $\theta(x) := x^\alpha \chi(x)$, où χ est une fonction cut-off.

Soit $K \subset \Omega$ un compact tel que $x_0 \in \mathring{K}$.

Puisqu'on suppose que $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ est d'ordre $\leq |\alpha| - 1$, il existe C tq

$$|\partial^\alpha \varphi(x_0)| \leq C \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \sup_{x \in K} |\varphi^{(\beta)}(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$$

Considérons en particulier $\varphi(x) := \theta(\lambda(x - x_0))$, λ grand

On obtient $\lambda^{|\alpha|} |\partial^\alpha \theta(0)| \leq C \lambda^{|\alpha|-1}$,

ce qui n'est pas vrai si λ est assez grand.

La contradiction termine la preuve. $\square$

5) Exemple d'une distribution d'ordre infini

Soit T définie par

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j), \qquad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Exercice Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Montrer que T n'est pas une distribution d'ordre fini.

Rappelons le résultat suivant de la théorie de la mesure.

Définition 4. Soit Ω un espace de Hausdorff localement compact. On dit qu'une forme linéaire $l : C_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est positive ou nulle si $l(f) \geq 0$ pour toute fonction $f \in C_0(\Omega)$ telle que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Théorème (thm. de représentation de Riesz ou Riesz–Markov–Kakutani).

Soit Ω un espace de Hausdorff localement compact et $l : C_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire positive. Alors il existe une mesure borélienne μ sur Ω tq

$$l(f) = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx), \qquad \forall f \in C_0(\Omega).$$

$\boxtimes$

Définition 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est positive ou nulle si

$$\langle T, \varphi \rangle \geq 0 \quad \text{pour toute fonction } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0.$$

Proposition 3. Toute distribution positive ou nulle est d'ordre 0.

Démonstration Il suffit de montrer que, si T est une distribution positive ou nulle et $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $C_K \geq 0$ tq

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$$

Soit $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tq $0 \leq \eta(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$ et $\eta(x) = 1 \quad \forall x \in K$ (une telle fonction η existe, voir Théorème 2 du chapitre précédent), et soit $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$. On observe que, $\forall x \in \Omega$,

$$-\left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\eta(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\eta(x),$$

donc la positivité de T implique que

$$-\left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\langle T,\eta\rangle \leqslant \langle T,\varphi\rangle \leqslant \left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\langle T,\eta\rangle,$$

d'où on déduit qu'il suffit prendre $C_K := \langle T,\eta\rangle$.

<u>Corollaire</u> Si T une distribution positive ou nulle sur Ω, alors il existe une mesure borélienne positive sur Ω telle que

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)\,\mu(dx), \qquad \forall \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

$\boxtimes$

3. Support des distributions

Définition 6. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et ω un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la restriction de T à ω, $T_{|\omega}$, est définie comme la forme linéaire sur $C_0^\infty(\omega)$ donnée par

$$\langle T_{|\omega}, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

Comme $C_0^\infty(\omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$, la définition a un sens.
Si $K \subset \omega$ un compact, alors

$$\langle T_{|\omega}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\omega) = C_K^\infty(\Omega),$$

donc la continuité de $T_{|\omega}$ sur $C_K^\infty(\omega)$ résulte directement de la continuité de T sur $C_K^\infty(\Omega)$, autrement dit $T_{|\omega} \in \mathcal{D}'(\omega)$.

On voit que, si $\omega' \subset \omega \subset \Omega$, alors $(T_{|\omega})_{|\omega'} = T_{|\omega'}$.

Proposition (Propriété de faisceau). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $(\omega_j)_j$ une famille localement finie d'ouverts telle que $\bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j = \Omega$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, soit $T_j \in \mathcal{D}'(\omega_j)$ et supposons que, $\forall\, i,j \in \mathbb{N}^*$ tq $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$, $T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}$. Alors, il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_{|\omega_j} = T_j$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration

Existence : Soit $(\chi_j)_j$ une partition de l'unité subordonnée à la famille $(\omega_j)_j$, dont l'existence est garantie par le Théorème 4 du Chapitre II.

Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors $\chi_j \varphi \in C_0^\infty(\omega_j)$ et $\langle T_j, \chi_j \varphi \rangle$ a un sens. On pose

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_j, \chi_j \varphi \rangle. \qquad (*)$$

Comme $\operatorname{supp} \varphi$ est un ensemble compact, l'ensemble $\{ j : \omega_j \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset \}$ est fini, donc la somme dans $(*)$ est finie.

<u>Exercice</u> Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. $\boxed{/}$

Montrons que $T|_{\omega_j} = T_j$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

On doit vérifier que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_j, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega_j).$$

Or,

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T_i, \chi_i \varphi \rangle$$

Comme $\chi_i \varphi \in C_0^\infty(\omega_i \cap \omega_j)$ et que $T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}$, on a $\langle T_i, \chi_i \varphi \rangle = \langle T_j, \chi_i \varphi \rangle$, d'où

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T_j, \chi_i \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T_j, \chi_i \varphi \rangle =$$

$$= \langle T_j, \sum_{i=1}^{I_0} \chi_i \varphi \rangle = \langle T_j, \varphi \rangle$$

Unicité : Il suffit de voir que $T|_{\omega_i} = 0$ pour tout i implique $T = 0$. Mais, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors il existe I_0 tq $\varphi = \sum_{i=1}^{I_0} \chi_i \varphi$, donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T, \chi_i \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T|_{\omega_i}, \chi_i \varphi \rangle = 0.$$

Définition On appelle le support de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ le complémentaire de la réunion de tous les ouverts $\omega \subset \Omega$ tels que $T_{|\omega} = 0$.
On le note $\operatorname{supp}(T)$.

Proposition Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

i) $x_0 \notin \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \exists V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$ et $T_{|V} = 0$

ii) $x_0 \in \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \forall V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$,
$$\exists \varphi \in C_0^\infty(V) \text{ tq } \langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

iii) Si $F \subset \Omega$ un fermé, alors
$$\operatorname{supp} T \subset F \Leftrightarrow T_{|\Omega \setminus F} = 0.$$

Démonstration i) est une réécriture de la définition.

ii) Par la partie i), on a
$x_0 \in \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \forall V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$, $T_{|V} \neq 0$.
Mais $T_{|V} \neq 0$ signifie précisément qu'il existe $\varphi \in C_0^\infty(V)$ tq $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

iii) $\Leftarrow$ Si $T_{|\Omega \setminus F} = 0$, alors, comme $\Omega \setminus F$ est un ouvert, $\Omega \setminus F \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} T$, autrement dit $\operatorname{supp} T \subset F$.

$\Rightarrow$ Soit $\operatorname{supp} T \subset F$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus F)$, donc $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \operatorname{supp} T)$.

Soit $K := \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} T$.

Par la partie i), $\forall x_0 \in K$ il existe $\omega_{x_0} \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in \omega_{x_0}$ et $T_{|\omega_{x_0}} = 0$.

On en extrait une famille finie qui recouvre K.

Soit ω leur réunion.

On a $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ donc, par la Propriété de faisceau, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Exemples • Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, et T_f la distribution associée. Alors $\operatorname{supp} T_f$ est le support essentiel de f.

Dém: Exercice

• $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}$.

Dém: Soit $F := \{x_0\}$ dans la Proposition ci-dessus, iii)

Si $\varphi \in C^\infty$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus \{x_0\}$, alors φ est identiquement nulle sur un voisinage ouvert de x_0, en particulier $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0) = 0$

On a donc $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) \subset \{x_0\}$.

Il suffit maintenant de vérifier que $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) \neq \emptyset$, c'est à dire que $\partial^\alpha \delta_{x_0} \neq 0$, autrement dit qu'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0) \neq 0$

Il suffit de prendre $\varphi(x) := \chi(x)(x - x_0)^\alpha$, où $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\chi \equiv 1$ près de x_0.

Théorème Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$.

Supposons que $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes $(a_\alpha)_{|\alpha| \le k}$ tels que

$$(*) \quad T = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

Démonstration Par translation, on se ramène au cas $x_0 = 0$

Soit $r > 0$ tel que $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$. On sait qu'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, $\forall \theta \in C^\infty$ avec $\operatorname{supp} \theta \subset \overline{B(0,r)}$

$$(\ast\ast) \quad |\langle T, \theta\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \theta(x)|.$$

Fixons une fonction cut-off $\chi \in C_0^\infty$, $\operatorname{supp} \chi \subset \overline{B(0,r)}$.

On montrera $(\ast)$ avec

$$a_\alpha := \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \chi\rangle.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \chi(x)$

On observe que, pour tout $|\alpha|\leq k$,

$$\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) =$$

$$= \Big\langle T - \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 , \varphi \Big\rangle,$$

donc il suffit de montrer que $\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0$.

Pour cela, on observe que, $\forall |\alpha|\leq k \ \exists C_\alpha$ tq

$|\partial^\alpha \tilde{\varphi}(x)| \leq C_\alpha |x|^{k+1-|\alpha|}$, $\forall |x|\leq r$. (Exercice)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $\varphi_n(x) := \tilde{\varphi}(x)\chi(nx)$.

La formule de Leibniz donne, pour tout $|\beta|\leq k$,

$$|\partial^\beta \varphi_n(x)| \leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial^\gamma \tilde{\varphi}(x)| \, |n^{|\beta|-|\gamma|} \partial^{\beta-\gamma}\chi(nx)|$$

Si $|x| \geq n^{-1} r$, alors la somme vaut 0.

Si $|x|\leq n^{-1}r$, alors elle s'estime par

$$\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} C_\gamma (n^{-1}r)^{k+1-|\gamma|} n^{|\beta|-|\gamma|} \lesssim n^{|\beta|-k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $(\ast\ast)$ implique $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = 0$.

Mais $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi} - \varphi_n) \not\ni 0$, donc $\langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \tilde{\varphi}\rangle$,

et on conclut que $\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0$.

$\square$

Exercice 1) Soit $x, y \in \mathbb{R}^a$ et u une fonction de classe C^{k+1} sur un voisinage ouvert du segment reliant x à $x+y$. Démontrer la formule de Taylor :

$$u(x+y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{k+1}{\alpha!} y^\alpha \int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha u(x+ty)\,dt$$

2) Soit u une fonction de classe C^{k+1} sur la boule de centre x_0 et de rayon $r>0$, tq $\partial^\alpha u(0) = 0$, $\forall\, |\alpha| \leq k$. Montrer qu'il existe $C>0$ tq $|\varphi(x)| \leq C|x-x_0|^{k+1}$, pour tout x dans cette boule. $\boxtimes$

4. Distributions à support compact.

Définition On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact si $\operatorname{supp} T \subset \Omega$ est un ensemble compact.

On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.

Théorème Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ si, et seulement si, il existe $\widetilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue telle que $\widetilde{T}_{|C_0^\infty(\Omega)} = T$.

Remarque On sait (Théorème 3, p. 29) que l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^\infty(\Omega)$, donc $\widetilde{T}$, si elle existe, est unique.

Démonstration du théorème

Supposons d'abord qu'il existe $\widetilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$, une extension continue de T. Par la Proposition 2, page 4, il existe $K_j \subset \Omega$ compact, $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle \widetilde{T}, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Montrons que $\operatorname{supp} T \subset K_j$.

En effet, soit $x_0 \notin K_j$, et $V \subset \Omega$ un ouvert tq $x_0 \in V$ et $V \cap K_j = \emptyset$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset V$, alors $\sup_{x \in K_j} |\partial_x^\alpha \varphi(x)| = 0$ pour tout $|\alpha| \leq k$, donc l'inégalité ci-dessus montre que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Cela montre que $x_0 \notin \operatorname{supp} T$, autrement dit $\operatorname{supp} T \subset K_j$.

Inversement, supposons que $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Soit $K_j \subset \Omega$ compact tq $\operatorname{supp} T \subset \mathring{K}_j$.

Par la définition d'une distribution, page 33,

$T|_{C^\infty_{K_j}(\Omega)} : C^\infty_{K_j}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue,

autrement dit il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C^\infty \text{ tq } \operatorname{supp} \varphi \subset K_j.$$

Fixons $\chi \in C^\infty$ tq $\chi(x) = 1$ sur un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} T$ et $\operatorname{supp} \chi \subset K_j$.

Soit $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ et considérons $\varphi := \chi \psi$.

Par la règle de Leibniz, il existe $C_\chi \geq 0$ tq

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha (\chi \psi)| \leq C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi|.$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$|\langle T, \chi \psi \rangle| \leq C C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Comme $\operatorname{supp}((1-\chi)\psi) \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, $\langle T, (1-\chi)\psi \rangle = 0$ et

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi(x)|, \ \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

On en déduit que T s'étend en une application continue $\tilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$.

<u>Remarque 1.</u> En particulier, toute distribution à support compact est d'ordre fini.

Chapitre IV : Opérations sur les distributions

1. Produit d'une distribution et d'une fonction C^∞

Théorème et Définition Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$.

On définit aT par

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

Si $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $C \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tq

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|, \quad \forall \psi \in C_K^\infty(\Omega)$$

Si $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors $a\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ aussi, donc

$$|\langle T, a\varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (a\varphi)(x)|$$

$$\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

où la dernière inégalité est une conséquence de la formule de Leibniz. On a donc

$$aT : C_K^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} \quad \text{continue, cqfd}$$

$\square$

Exercice Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a, b \in C^\infty(\Omega)$. Montrer que.

1) $\operatorname{supp}(aT) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$
2) $(a+b)T = aT + bT$
3) $a(T+S) = aT + aS$
4) $a(bT) = (ab)T$.

Exemples

- $a\,\delta_{x_0} = a(x_0)\,\delta_{x_0}$
- $x \operatorname{vp}\frac{1}{x} = 1$.

Exercice Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $xT = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $T = \lambda \delta_0$.

2. Dérivation des distributions

Définition et théorème Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit une forme linéaire $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ sur $C_0^\infty(\Omega)$ en posant

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle := -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration Si $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$, $\forall \psi \in C_K^\infty(\Omega)$,

donc $\left|\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle\right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \partial_{x_j} \varphi(x)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k+1} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$;

donc $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Propriétés i) Si $T = T_f$ avec f de classe C^1, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}.$$

ii) $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'^{(k+1)}(\Omega)$

iii) $\operatorname{supp} \frac{\partial T}{\partial x_j} \subset \operatorname{supp} T$

iv) si $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(aT) = \frac{\partial a}{\partial x_j} T + a \frac{\partial T}{\partial x_j}$.

Preuve. Exercice

Remarque (dérivées d'ordre supérieur)

Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$.

3. Exemples de dérivées au sens des distributions

Exemple 1. Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $v(x) := \int_0^x u(t)\,dt$.

Alors v est une fonction continue et la dérivée de T_v au sens des distributions est T_u.

Preuve. On écrit u au lieu de T_u et v au lieu de T_v.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\langle v', \varphi\rangle = -\langle v, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x u(y)\,dy\right)\varphi'(x)\,dx.$$

On peut utiliser Fubini :

$$\langle v', \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(y)\,\varphi'(x)\,\mathbb{1}_{0<y<x}\,dx\right)dy$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(y)\,\varphi'(x)\,\mathbb{1}_{x<y<0}\,dx\right)dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_y^{+\infty} \varphi'(x)\,dx\right)\mathbb{1}_{y>0}\,u(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{y} \varphi'(x)\,dx\right)\mathbb{1}_{y<0}\,u(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathbb{1}_{y>0}\,u(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathbb{1}_{y<0}\,u(y)\,dy = \langle u, \varphi\rangle.$$

Exemple 2. Soit $H(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$. Alors $H' = \delta_0$.

Exemple 3. Au sens des distributions, $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

Proposition Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $T \in \mathcal{D}'(I)$.

Alors $T = \text{const} \iff T' = 0$.

Démonstration $\Rightarrow$ évident.

$\Leftarrow$ Si $T' = 0$, alors $\langle T, \theta' \rangle = 0$, $\forall \theta \in C_0^\infty(I)$.

Fixons $\rho \in C_0^\infty(I)$ avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$.

Si $\varphi \in C_0^\infty(I)$, soit

$$\psi(x) := \varphi(x) - \rho(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,dy \in C_0^\infty(I).$$

Soit $\theta(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,dy$.

Alors $\theta' = \psi$ et $\theta \in C_0^\infty(I)$.

En effet, si $a < b$ sont tels que

$\operatorname{supp} \varphi \cup \operatorname{supp} \rho \subset [a,b] \subset I$, alors

$\operatorname{supp} \theta \subset [a,b]$, puisque, si $x \geq b$,

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,dy \right) dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,dy \right) dz = 0.$$

Par conséquent, $\langle T, \theta' \rangle = \langle T, \psi \rangle = 0$ donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \rho \rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,dy = C \langle 1, \varphi \rangle,$$

où $C := \langle T, \rho \rangle$, donc $T = C = \text{const}$.

4. Translations, changement d'échelle, changement de variables.

Notation : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$.

On pose $(\tau_a \varphi)(x) := \varphi(x-a)$.

Définition Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$.

On définit $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle .$$

$\boxtimes$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et, pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, soit $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_\lambda(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,|\lambda|^{-d}\varphi(y/\lambda)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,|\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda}(y)dy .$$

On utilise donc cette formule pour définir T_λ lorsque $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

Définition Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

On définit $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T_\lambda, \varphi \rangle := \langle T, |\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda} \rangle .$$

$\boxtimes$

Soient $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ deux ouverts, $\kappa : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme C^∞. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $f \circ \kappa^{-1} : \Omega' \to \mathbb{C}$. Alors $f \circ \kappa^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega')$.
Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, on a

$$\int_{\Omega'} (f \circ \kappa^{-1})(x')\varphi(x')\,dx' = \int_{\Omega} f(x)\,\varphi(\kappa(x))\,|\det J_\kappa(x)|\,dx,$$

où $J_\kappa(x)$ est la matrice jacobienne de κ.
On a donc $\langle T_{f\circ\kappa^{-1}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\circ\kappa\,|\det J_\kappa|\rangle$,

et $x \mapsto \varphi\circ\kappa(x)\,|\det J_\kappa(x)|$ est une fonction C^∞ car $J_\kappa(x)$ ne s'annule pas.
Cela permet de définir la composition d'une distribution et d'un difféomorphisme C^∞.
<u>Notation</u> : Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, on pose $\kappa^*\varphi := \varphi\circ\kappa \in C_0^\infty(\Omega)$, donc $\kappa^* : C_0^\infty(\Omega') \to C_0^\infty(\Omega)$ lorsque $\kappa : \Omega \to \Omega'$.

<u>Définition et proposition</u> Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\kappa : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme C^∞. On définit $\kappa_* T \in \mathcal{D}'(\Omega')$ par

$$\langle \kappa_* T, \varphi\rangle := \langle T, (\kappa^*\varphi)\,|\det J_\kappa|\rangle.$$

<u>Démonstration</u> Soit $K' \subset \Omega'$ compact.
On doit montrer qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ et $C' \geq 0$ tq

$$|\langle \kappa_* T, \varphi\rangle| \leq C' \sum_{|\alpha|\leq k'} \sup_{x'\in K'} |\partial^\alpha \varphi(x')|.$$

Soit $K := \kappa^{-1}(K') \subset \Omega$ compact. Alors $\kappa^*\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$.
Si on pose $\psi = \kappa^*\varphi\,|\det J_\kappa|$, on a donc

$$\langle \kappa_* T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\rangle.$$

Comme $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Il suffit donc de voir que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha [\varphi \circ \kappa(x) |\det J_\kappa(x)|]|$$
$$\leq C'' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x' \in \Omega'} |\partial^\alpha \varphi(x')|.$$

Or on vérifie par récurrence que $\partial^\alpha [\varphi \circ \kappa(x)]$ est combinaison linéaire d'expressions

$$(\partial^\beta \varphi)(\kappa(x))\, P_{\alpha,\beta}\left((\partial^\gamma \kappa)_{1 \leq |\gamma| \leq |\alpha|}\right) \text{ avec } |\beta| \leq |\alpha|$$

et $P_{\alpha,\beta}$ polynôme.

__Exemple__ Soit $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphisme.

Calculons $\kappa_* \delta_0$. On a

$$\langle \kappa_* \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, (\varphi \circ \kappa) |\kappa'| \rangle$$
$$= \varphi \circ \kappa(0)\, |\kappa'(0)| = |\kappa'(0)| \langle \delta_{\kappa(0)}, \varphi \rangle,$$

donc $\kappa_* \delta_0 = |\kappa'(0)|\, \delta_{\kappa(0)}$.

__Remarque__ Les translations et les changements d'échelle sont des cas particuliers de changements de variables.

5. Limite d'une suite de distributions

Définition Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

On écrit souvent $T_n \rightharpoonup T$.

Propriétés i) Si $T_n \rightharpoonup T$, alors $\partial^\alpha T_n \rightharpoonup \partial^\alpha T$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

ii) Si $(f_n)_n$ une suite dans $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, et $f_n \to f$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$, alors $T_{f_n} \rightharpoonup T_f$.

$\boxtimes$

Définition Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite $S_n := \sum_{n'=0}^{n} T_{n'}$ converge

Remarque Si $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge, alors

$$\partial^\alpha \Big(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^\alpha T_n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Exemples

i) Soit $\chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\int \chi(x)\, dx = 1$, et $\chi_n(x) := n^d \chi(nx)$. Alors $\chi_n \rightharpoonup \delta_0$.

ii) Soit $\chi_n(x) := \exp(2\pi i n x)$, $\chi_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $\chi_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

iii) $\dfrac{\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}}{x} \rightharpoonup \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$.

Remarque Dans le dernier exemple il n'y a pas de suite ; il faut comprendre que $\lim \langle \frac{\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}}{x}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle$ $\forall \varphi$.

<u>Théorème</u> Soit $(T_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, il existe $l_\varphi \in \mathbb{C}$ avec $\langle T_n, \varphi \rangle \to l_\varphi$. Il existe alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \to T$.

<u>Démonstration</u>

Il est évident que $\langle T, \varphi \rangle := l_\varphi$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$.
Il suffit de montrer que $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$ est continue pour tout $K \subset \Omega$ compact.

Rappelons que $C_K^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet.
Les formes linéaires $\left(T_n|_{C_K^\infty(\Omega)}\right)_n$ vérifient les conditions du Théorème 1, page 7, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

En passant à la limite, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega),$$

autrement dit la continuité de $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$.

$\square$

<u>Exercice</u> Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_{he_j} T - T}{h} = \partial_{x_j} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

$\boxtimes$

De même, si $(S_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}'(\Omega)$, on écrit $S_n \to S$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \langle S_n, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

__Proposition__ Soit $(S_n)_n$ une suite dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ telle que, $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$, il existe $l_\varphi \in \mathbb{C}$ avec $\langle S_n, \varphi\rangle \longrightarrow l_\varphi$. Il existe alors $K \subset \Omega$ compact tel que $\operatorname{supp}(S_n) \subset K$ pour tout n, et $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$, telle que $\operatorname{supp}(S) \subset K$ et $S_n \to S$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$.

__Démonstration__ __Exercice.__
Indication : $C^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

$\boxtimes$

6. Produit de convolution des distributions

Convolution d'une distribution par une fonction test

Notation Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ la fonction $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$.

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ la distribution $\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle$. $\boxtimes$

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, et $\varphi, \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par le thm de Fubini,

$$\langle \varphi * f, \chi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi * f)(y)\, \chi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(y-x) \chi(y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (\check{\varphi} * \chi)(x)\, dx = \langle f, \check{\varphi} * \chi \rangle .$$

Comme d'habitude, on utilise cette relation pour <u>définir</u> $\varphi * T$ pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

Définition Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
On définit $\varphi * T = T * \varphi$ par

$$\langle \varphi * T, \chi \rangle = \langle T * \varphi, \chi \rangle := \langle T, \check{\varphi} * \chi \rangle, \qquad \forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Exercice Montrer que cette condition définit, en effet, une distribution.

Proposition 1) Pour tous $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\alpha (\varphi * T) = (\partial^\alpha \varphi) * T = \varphi * (\partial^\alpha T).$$

2) Pour tous $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$(\varphi * \psi) * T = \varphi * (\psi * T)$$

Démonstration

1) Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par les définitions, on a

$$\langle \partial^\alpha(\varphi * T), \chi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \varphi * T, \partial^\alpha \chi\rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \check{\varphi} * (\partial^\alpha \chi)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha(\check{\varphi} * \chi)\rangle$$

$$= \langle \partial^\alpha T, \check{\varphi} * \chi\rangle = \langle \varphi * (\partial^\alpha T), \chi\rangle, \quad \text{et}$$

$$(-1)^{|\alpha|}\langle T, \check{\varphi} * (\partial^\alpha \chi)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, (\partial^\alpha \check{\varphi}) * \chi\rangle$$

$$= \langle T, (\partial^\alpha \varphi)^\vee * \chi\rangle = \langle (\partial^\alpha \varphi) * T, \chi\rangle.$$

2) Si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle (\varphi * \psi) * T, \chi\rangle = \langle T, (\varphi * \psi)^\vee * \chi\rangle \quad \text{et}$$

$$\langle \varphi * (\psi * T), \chi\rangle = \langle \psi * T, \check{\varphi} * \chi\rangle$$

$$= \langle T, \check{\psi} * (\check{\varphi} * \chi)\rangle,$$

donc il suffit de vérifier que $(\varphi * \psi)^\vee * \chi = \check{\psi} * (\check{\varphi} * \chi)$

On calcule:

$$((\varphi * \psi)^\vee * \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y)(\varphi * \psi)(-y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-y-z)\psi(z)\,dz\,dy,$$

$$(\check{\psi} * (\check{\varphi} * \chi))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-x+y')(\check{\varphi} * \chi)(y')\,dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-x+y') \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z'-y')\chi(z')\,dz'\,dy',$$

ce qui est la même chose par le changement des variables $(y', z') = (x+z, x-y)$. $\square$

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y) f(y)\,dy = \langle f, \varphi(x - \cdot)\rangle.$$

Cela reste vrai pour les distributions:

<u>Théorème</u> Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(T*\varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot)\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$

<u>Démonstration</u>

Soit $\psi(x) := \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle$. On montre d'abord que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et ensuite que $T * \varphi = \psi$.

Il suffit de vérifier que $\psi \in C^1$ et $\partial_{x_j}\psi(x) = \langle T, \partial_{x_j}\varphi(x - \cdot)\rangle$.

Par récurrence, il en résultera que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, soit $\varphi_x(y) := \varphi(x-y)$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $x_n \to x_0$. On voit alors qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $\operatorname{supp}(\varphi_{x_n}) \subset K$, $\forall n$, et $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi_{x_n}(y) - \partial^\alpha \varphi_{x_0}(y)| = 0$,

donc $\varphi_{x_n} \longrightarrow \varphi_{x_0}$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc $\psi(x_n) \to \psi(x_0)$, donc ψ est une fonctions continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et considérons

$$\psi(x_0 + he_j) - \psi(x_0) - h\langle T, \partial_{x_j}\varphi(x_0 - \cdot)\rangle =$$

$$= \langle T, \varphi(x_0 + he_j - \cdot) - \varphi(x_0 - \cdot) - h\,\partial_{x_j}\varphi(x_0 - \cdot)\rangle$$

Par la formule de Taylor,

$$\varphi(x_0 + he_j - y) - \varphi(x_0 - y) - h\partial_{x_j}\varphi(x_0 - y) =$$

$$= h^2 \int_0^1 (1-s)\,\partial_{x_j}^2 \varphi(x_0 - y + hse_j)\,ds.$$

En dérivant par rapport à y sous le signe d'intégration, on obtient que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\exists\, C_\alpha \geq 0$ tq

$$\sup_{y\in K} \left|\partial^\alpha\left(\varphi(x_0+he_j-y)-\varphi(x_0-y)-h\partial_{x_j}\varphi(x_0-y)\right)\right| \leq C_\alpha h^2,$$

donc $\quad \left|\psi(x_0+h)-\psi(x_0)-h\langle T, \partial_{x_j}\varphi(x_0-\cdot)\rangle\right| \lesssim h^2,$

ce qui montre que $\partial_{x_j}\psi(x_0) = \langle T, \partial_{x_j}\varphi(x_0-\cdot)\rangle$.

Montrons maintenant que $T*\varphi = \psi$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il faut vérifier que

$$\langle T*\varphi, \chi\rangle = \langle \psi, \chi\rangle \Leftrightarrow \langle T, \check{\varphi}*\chi\rangle = \langle \psi, \chi\rangle$$

$$\Leftrightarrow \left\langle T, y\mapsto \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x-y)\chi(x)dx\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\chi(x)\langle T, y\mapsto\varphi(x-y)\rangle\, dx$$

il faut donc justifier la possibilité d'échanger l'ordre de T et $\int$. L'idée est d'approcher l'intégrale par sa somme de Riemann, et d'utiliser la linéarité de T

Pour $h>0$, soit $\xi_h(y) := h^d \sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}^d \\ hz\in \operatorname{supp}\chi}} \varphi(hz-y)\chi(hz)$.

Alors tous les $\operatorname{supp}(\xi_h)$ sont dans un compact fixe K pour $|h|\leq 1$, et $\lim_{h\to 0}\xi_h = y\mapsto \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x-y)\chi(x)d$

dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$. En effet, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha\xi_h$ est une famille de fonctions continues, bornées uniformément, et $\partial^\alpha\xi_h(y) \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\partial^\alpha\varphi(x-y)\chi(x)dx$ pour tout $y\in K$.

Il en résulte que la convergence est uniforme.

Or, T est continue $C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, donc

$$\left\langle T, y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\chi(x)dx \right\rangle = \lim_{h\to 0} \langle T, \xi_h \rangle.$$

Pour tout $h > 0$, la somme définissant ξ_h est finie, donc

$$\langle T, \xi_h \rangle = h^d \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ hz \in \operatorname{supp} \chi}} \langle T, y \mapsto \varphi(hz-y)\chi(hz) \rangle =$$

$$= h^d \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ hz \in \operatorname{supp} \chi}} \chi(hz) \langle T, y \mapsto \varphi(hz-y) \rangle = h^d \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ h \in \operatorname{supp} \chi}} \chi(hz)\psi(hz$$

La fonction ψ est continue, donc la dernière somme de Riemann converge vers $\langle \psi, h \rangle$. $\square$

<u>Théorème</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Il existe une suite $(\psi_n)_n$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> Soit ρ_ε le "noyau régularisant", comme au Chapitre II.3, page 20.
Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts et $\chi_j \in C_{K_{j+1}}^\infty(\Omega)$, $\chi_j = 1$ sur K_j.
On pose $\psi_n := \chi_n (\rho_{1/n} * T)$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour n assez grand, $\chi_n = 1$ sur $\operatorname{supp} \varphi$, donc

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\chi_n(x)(\rho_{1/n} * T)(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(\rho_{1/n} * T)(x)\,dx = \langle \rho_{1/n} * T, \varphi \rangle =$$

$$= \langle T, \check{\rho}_{1/n} * \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$$ (cf. Corollaire 1, page 24)

Convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact

Définition Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $T * S = S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \langle T, \check{S} * \varphi \rangle.$$

Exercice Montrer que la condition ci-dessus définit un élément $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Indication : Si S et φ sont à support compact, $S * \varphi$ aussi.

Exemple • Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors

$$\delta_{x_0} * T = \tau_{x_0} T$$

• Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors

$$(\partial^\alpha \delta_0) * T = \partial^\alpha T.$$

Proposition (Continuité de la convolution)

1) Soit $(T_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ avec $T_n \to T$, et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T_n * S \to T * S$.

2) Soit $(S_n)_n$ une suite de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ avec $S_n \to S$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T * S_n \to T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Démonstration

1) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On veut montrer que

$$\langle T_n, \check{S} * \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \check{S} * \varphi \rangle.$$

Mais $\check{S} * \varphi$ est une fonction fixe dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On veut montrer que

$$\langle T, \check{S}_n * \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \check{S} * \varphi \rangle.$$

Il suffit de montrer qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $\check{S}_n * \varphi \longrightarrow \check{S} * \varphi$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On sait que les supports de S_n sont des sous-ensembles d'un compact fixe (voir page 60), donc $\exists K$ compact tel que $\operatorname{supp}(\check{S}_n * \varphi) \subset K$, $\forall n$.

Par le Thm 1 p.7, il existe C, k tq

$$|\langle \check{S}_n, \varphi(x - \cdot)\rangle| \leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \varphi(y)|, \quad \text{donc}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(\check{S}_n * \varphi)(x)| \leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \varphi(y)| < \infty,$$

et de même $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\underbrace{\partial^\alpha(\check{S}_n * \varphi)}_{= \check{S}_n * (\partial^\alpha \varphi)}(x)| < \infty$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $(\check{S}_n * \varphi)(x) \to (\check{S} * \varphi)(x)$, donc le fait que toutes les dérivées soient uniformément bornées implique que la convergence a lieu dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

<u>Remarque</u> Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est fixe, alors

$L_T : S \mapsto T * S$ est un opérateur linéaire

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

continu (pour la notion de convergence de suites).

On appelle T le <u>noyau</u> de l'opérateur L_T.

Un tel opérateur L_T est <u>invariant par translations</u>:

$$L_T(\tau_{x_0} S) = T * (\tau_{x_0} S) = \tau_{x_0}(T * S) = \tau_{x_0}(L_T S).$$

On peut montrer que <u>tous</u> les opérateurs linéaires invariants par translations ont cette forme.

Chapitre V. Solutions élémentaires

Définition Un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$ est un opérateur $P : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to C^\infty(\mathbb{R}^d)$ de la forme $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$, où $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

Remarque Soit $p := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Alors $P\varphi = p * \varphi$, $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Un opérateur différentiel est donc un opérateur de convolution. Il est <u>local</u>, c'est-à-dire $(P\varphi)(x)$ ne dépend que des valeurs de φ au voisinage arbitrairement petit de x.

Les opérateur différentiels sont les seuls opérateurs de convolution ayant cette propriété.

Définition Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Une <u>solution élémentaire</u> de P est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $PE = \delta_0$ $\boxtimes$

Si on connait une solution élémentaire E de l'opérateur différentiel P, alors on peut résoudre explicitement l'équation différentielle $Pu = f$ pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$:

$$u := E * f \quad \text{est une solution de } Pu = f.$$

Remarque La question de l'unicité est délicate.

Théorème (Malgrange–Ehrenpreis) Tout opérateur différentiel à coefficients constants non nul a une solution élémentaire. $\boxtimes$

On verra en TD des exemples de solutions élémentaires.

Bibliographie

* Jean-Marc DELORT, "Distributions", notes de cours.
* Claude ZUILY, "Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles", DUNOD, 2002
* Laurent SCHWARTZ, "Théorie des distributions", Hermann, Paris 1966
* Gerd GRUBB, "Distributions and operators", Springer, 2009