TD I : ESPACES DE FRÉCHET, FONCTION DIFFÉRENTIABLES

4 MARS 2021

Exercice 1. Montrer qu'une suite séparante de semi-normes définit une topologie de Hausdorff.

Exercice 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $k \in \mathbb{N}$ et $u, v \in C^k(\Omega)$. Montrer que $uv \in C^k(\Omega)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a la *formule de Leibniz*

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v).$$

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert. Montrer qu'il existe une suite exhaustive de compacts de Ω.

Exercice 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^\infty(\Omega)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^\infty(\Omega)$,

ii) pour tout $K \subset \Omega$ compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ uniformément sur K.

Exercice 5. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$f(x) = f(0) + x\psi(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. 1) Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{y\to 0+} g'(y) = \ell$ existe. Montrer que g est C^1 sur $[0, +\infty[$ et que $g'(0) = \ell$. (On utilisera le théorème des accroissements finis sur $[z, y]$ avec $0 < z < y$).

2) Soit h une fonction C^∞ impaire sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut écrire $h(y) = yh_1(y)$ avec h_1 fonction C^∞.

3) a) Soit f une fonction C^∞ paire sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On pose pour $y \in [0, +\infty[$, $g(y) = f(\sqrt{y})$. Montrer que g est C^1 sur $[0, +\infty[$. (On utilisera la première question).

b) Montrer que g est C^∞ sur $[0, +\infty[$.

4) Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux fonctions C^∞ sur $[0, +\infty[$, g_0 et g_1, telles que pour tout réel x, $f(x) = g_0(x^2) + xg_1(x^2)$.

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Montrer que :

i) si $T : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, alors il existe $K \subset \Omega$ compact et $g \in L^\infty(K)$ tels que

$$Tf = \int_K f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

ii) si $T : C(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, alors il existe $K \subset \Omega$ compact et une mesure borélienne complexe μ sur K tels que

$$Tf = \int_K f(x)\mu(\mathrm{d}x), \qquad \text{pour tout } f \in C(\Omega).$$

Exercice 1.

Montrons d'abord qu'une famille de semi-normes définit une topologie.

Il faut vérifier les conditions suivantes :

i) Si $(U_a)_{a\in A}$ est une famille d'ensembles ouverts, alors $U := \bigcup_{a\in A} U_a$ est un ensemble ouvert,

ii) Si $m\in\mathbb{N}^*$ et $U_1, \dots, U_m$ sont des ensembles ouverts, alors $U := \bigcap_{l=1}^{m} U_l$ est un ouvert

iii) $\emptyset$ et X sont des ensembles ouverts.

Ad i) Si $u\in U$, alors $\exists\, a\in A$ tq $u\in U_a$.
Comme U_a est un ouvert, $\exists\, j_0\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$ tq

$$\{v\in X : p_j(v-u)<\varepsilon \text{ pour tout } j\leq j_0\}\subset U_a\subset U,$$

donc U est un ouvert.

Ad ii) Soit $u\in U$, donc $u\in U_l$ pour tout $l=1\dots m$.
Comme U_l ouvert, $\exists\, j_0^{(l)}\in\mathbb{N}^*$, $\varepsilon^{(l)}>0$ tq

$$\{v\in X : p_j(v-u)<\varepsilon^{(l)} \text{ pour tout } j\leq j_0^{(l)}\}\subset U_l.$$

Prenons $j_0 := \max_{1\leq l\leq m}\{j_0^{(l)}\}$, $\varepsilon := \min_{1\leq l\leq m}\{\varepsilon^{(l)}\}$.

Alors

$$\{v\in X : p_j(v-u)<\varepsilon \text{ pour tout } j\leq j_0\}$$
$$\subset \{v\in X : p_j(v-u)<\varepsilon^{(l)} \text{ pour tout } j\leq j_0^{(l)}\},$$

pour tout $1\leq l\leq m$.

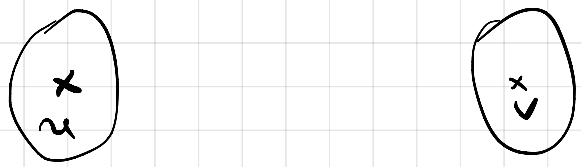
donc

$\{v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon \text{ pour tout } j \leq j_0\} \subset \mathcal{U}$.

Ad iii) Evident.

Hausdorff :

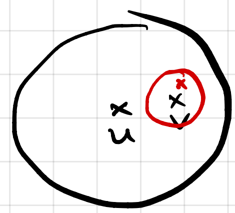
Si $u, v \in X$, $u \neq v$, alors $\exists\, U, V$ ouverts tq $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$.



Suggestion : Mq que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon > 0$, $u \in X$

$\{v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon\}$ est un ouvert.

Soit v tq $p_j(v-u) < \varepsilon$.



Soit $0 < \delta < \varepsilon - p_j(v-u)$

et $w \in X$ tq $p_j(w-v) < \delta$.

Alors $p_j(w-u) \leq p_j(w-v) + p_j(v-u)$

$< \delta + p_j(v-u) < \varepsilon$, donc

$w \in \{v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon\}$.

Ce dernier est donc un ouvert.

Hausdorff : $u, v \in X$, $u \neq v$.

Comme $(p_j)_j$ est une suite séparante,

$\exists_{j \in \mathbb{N}^*}$ tq $\quad p_j(v-u) > 0.$

Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} p_j(v-u)$,

$$\mathcal{U} := \{ \tilde{u} : p_j(\tilde{u}-u) < \varepsilon \}, \quad \mathcal{V} := \{ \tilde{v} : p_j(\tilde{v}-v) < \varepsilon \}.$$

$\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont ouverts.

Il reste à vérifier que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Soit $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, $\tilde{v} \in \mathcal{V}$. Il faut mq $\tilde{u} \neq \tilde{v}$.

On a

$$p_j(u-v) \leq p_j(u-\tilde{u}) + p_j(\tilde{u}-\tilde{v}) + p_j(\tilde{v}-v)$$

$$< 2\varepsilon + p_j(\tilde{u}-\tilde{v})$$

$$\Rightarrow \quad p_j(\tilde{u}-\tilde{v}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u} \neq \tilde{v}.$$

Exercice 2.

$uv \in C^k(\Omega)$: par récurrence par rapport à k.

$k=1$: connu :

Si u, v différentiable ~~sur~~ en x_0, alors uv aussi et

$$\left(\partial_{x_i}(uv)\right)(x_0) = \left(\partial_{x_i} u(x_0)\right) v(x_0) + u(x_0)\left(\partial_{x_i} v(x_0)\right).$$

$k=1$ OK.

Hérédité : $k \geq 2$

Si $u, v \in C^k(\Omega)$ alors en part. $u, v \in C^1(\Omega)$, donc $uv \in C^1(\Omega)$ et

$$\partial_{x_i}(uv) = \underbrace{(\partial_{x_i} u) v}_{\in C^{k-1}} + \underbrace{u(\partial_{x_i} v)}_{\in C^{k-1}}, \quad \forall i = 1..d.$$

Comme $\partial_{x_i} u \in C^{k-1}$ et $v \in C^{k-1}$, alors par l'hypothèse de récurrence $(\partial_{x_i} u) v \in C^{k-1}$

de même $u(\partial_{x_i} v) \in C^{k-1}$.

$\Rightarrow uv \in C^k$.

Formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v).$$

Récurrence par rapport à $|\alpha|$. ← possible.

Une autre possibilité :

On considère comme connue la formule de Leibniz pour les fonctions d'une variable :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Si $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_d)$, alors

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}(uv) = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_d=0}^{\alpha_d} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_d}{\beta_d} (\partial_{x_1}^{\beta_1} u\, \partial_{x_1}^{\alpha_1-\beta_1} v) \dots (\partial_{x_d}^{\beta_d} u\, \partial_{x_d}^{\alpha_d-\beta_d} v)$$

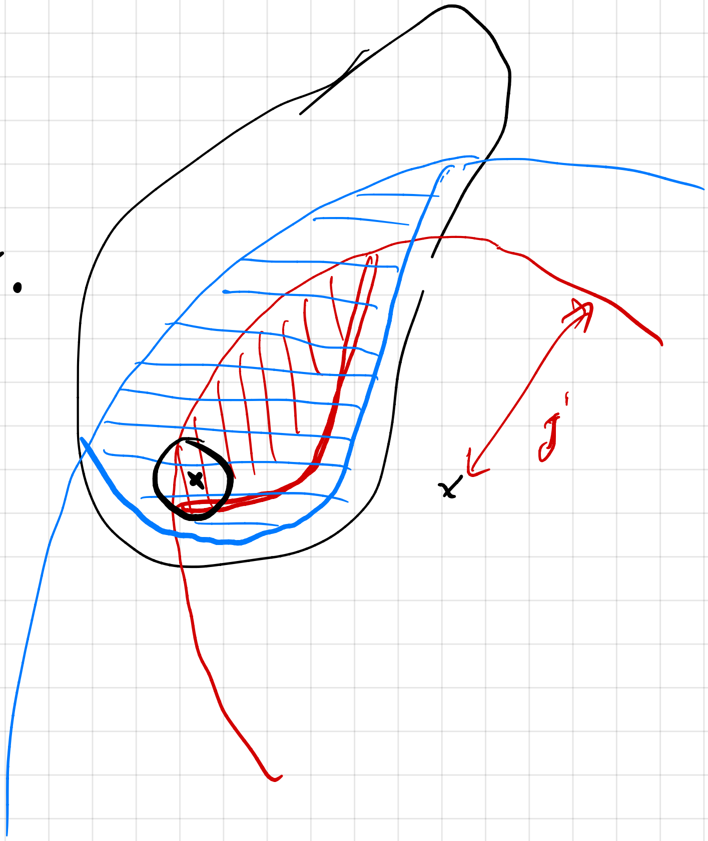
Récurrence par rapport au nombre de variable.

$$\partial_{x_d}^{\alpha_d}(uv) = \sum_{\beta_d=0}^{\alpha_d} \binom{\alpha_d}{\beta_d} \partial_{x_d}^{\beta_d} u\, \partial_{x_d}^{\alpha_d-\beta_d} v.$$

$$(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_{d-1}}^{\alpha_{d-1}}) \Big(\underbrace{\partial_{x_d}^{\alpha_d}(uv)}_{\text{vue comme une fonction de } d-1 \text{ variables}} \Big) = \sum_{\beta_d=0}^{\alpha_d} \binom{\alpha_d}{\beta_d} (\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_{d-1}}^{\alpha_{d-1}}) (\partial_{x_d}^{\beta_d} u\, \partial_{x_d}^{\alpha_d-\beta_d} v)$$

Exercice 3.

i) Il faut montrer que K_j est un compact $\Leftrightarrow$ K_j est fermé et borné.



K_j est borné.

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de K_j, $x_n \to x \in \mathbb{R}^d$.

Il faut mq $x \in K_j$.

1) Bien sur, $|x| \leq j$.

2) $\text{dist}(x, \complement\Omega) \overset{?}{\geq} \frac{1}{j}$.

On sait que $\text{dist}(x_n, \complement\Omega) \geq \frac{1}{j}$

$$\text{dist}(x_n, \complement\Omega) = \inf_{y \in \complement\Omega} |x_n - y|$$

Fixons $y \in \complement\Omega$. On a $|x_n - y| \geq \frac{1}{j}$

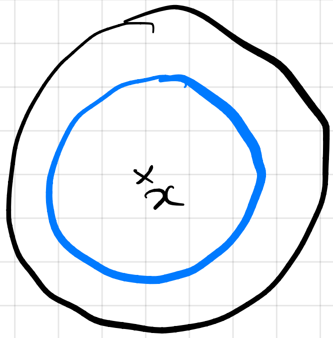
$\Rightarrow |x - y| \geq \frac{1}{j} \Rightarrow \text{dist}(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{j}$

$\Rightarrow x \in K_j$.

$K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$

Soit $x \in K_j$. Il faut mq $\exists \rho > 0$ tq $|y - x| < \rho \Rightarrow y \in K_{j+1}$.

$x \in \Omega$, donc $\exists \varepsilon > 0$ tq
$|y-x| < \varepsilon \implies y \in \Omega$



Soit $\rho < \min\left(\varepsilon, \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)$,

et $|y-x| < \rho$.

Montrons que $y \in K_{j+1}$.

On a $y \in \Omega$.

Aussi $|y| \leq \rho + |x| \leq \rho + j < j+1$

Il reste à montrer que $\mathrm{dist}(y, \complement\Omega) \geq \frac{1}{j+1}$.

Autrement dit, $\forall z \notin \Omega \quad |y-z| \geq \frac{1}{j+1}$.

Mais $|y-z| \geq |x-z| - |y-x| > |x-z| - \rho$

$$\geq \frac{1}{j} - \rho > \frac{1}{j+1} \implies y \in K_{j+1}.$$

ii) $\displaystyle\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \mathring{K}_j \overset{?}{=} \Omega$.

On a $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \mathring{K}_3 \subset K_3 \subset \mathring{K}_4 \subset \ldots$

donc $$\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \mathring{K}_j = \bigcup_{j \geq 2} \mathring{K}_j \supset \bigcup_{j \geq 2} K_{j-1}$$

$$= \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} K_j$$

Il faut mq si $x \in \Omega$, alors $\exists j \in \mathbb{N}^*$
tq $x \in K_j$.

Mais si $x \in \Omega$, alors $|x| < \infty$

et $\operatorname{dist}(x, \complement\Omega) > 0$

donc $\exists\, j \in \mathbb{N}^*$ tq $|x| \leq j$

et $\operatorname{dist}(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{j}$

$\Longrightarrow x \in K_j$.

iii) $K \subset \Omega$ compact $\Longrightarrow \exists\, j \in \mathbb{N}^*$ tq $K \subset \mathring{K}_j$.

$K \subset \Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \mathring{K}_j$, donc

il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tq

$K \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} \mathring{K}_j \Longrightarrow K \subset \mathring{K}_{j_0}$.

$\square$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n).$$

Objectif : $f(x) = f(0) + x\psi(x)$

$$\Longrightarrow \psi(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Mq $\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est de classe C^∞.

Vous me dites:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) + \frac{1}{2}f''(0)x + \frac{1}{6}f'''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

1) ψ est C^∞ sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

2) ψ a un DL à tout ordre en 0.

$$\not\Longrightarrow \psi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Suggestion : Utiliser le thm fondamental

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

Si $x \neq 0$, changer la variable $s = \frac{t}{x}$.

$t = sx$

$$\cancel{f} \quad \int_0^x f'(t)\,dt = x\int_0^1 f'(sx)\,ds$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} = \int_0^1 f'(sx)\,ds \quad \text{si } x\neq 0.$$

Pour $x=0$, on a $\int_0^1 f'(sx)\,ds = f'(0)$,

donc

$$\psi(x) = \int_0^1 f'(sx)\,ds, \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Dérivation sous le signe de l'intégrale :

$$\psi^{(n)}(x) = \int_0^1 s^n f^{(n+1)}(sx)\,ds.$$

Exercice 6.

i) On veut montrer que la dérivée à droite de g en 0 est égale à l, autrement dit

$$\lim_{y\to 0^+} \left| \frac{g(y)-g(0)}{y} - l \right| = 0,$$

autrement dit $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_0 > 0$ tq

$0 < y < y_0$ implique

$$(*) \quad |g(y) - g(0) - ly| \leq \varepsilon y.$$

Soit $0 < z < y$.

g est continue, donc

$$|g(y) - g(0) - ly| = \lim_{z\to 0^+} |g(y) - g(z) - (y-z)l|$$

On a $g(y) - g(z) = g'(t)(y-z)$ pour un certain $t \in [z, y]$.

Comme $\lim_{y\to 0^+} g'(y) = l$, il existe y_0 tq

$$y < y_0 \Rightarrow |g'(t) - l| < \varepsilon,$$ donc

$$|g(y) - g(z) - l(y-z)| \leq \varepsilon(y-z)$$

En passant à la limite $z \to 0$, on obtient $(*)$