TD I : ESPACES DE FRÉCHET, FONCTION DIFFÉRENTIABLES

4 MARS 2021

Exercice 1. Montrer qu'une suite séparante de semi-normes définit une topologie de Hausdorff.

Exercice 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $k \in \mathbb{N}$ et $u, v \in C^k(\Omega)$. Montrer que $uv \in C^k(\Omega)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a la *formule de Leibniz*

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v).$$

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert. Montrer qu'il existe une suite exhaustive de compacts de Ω.

Exercice 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^\infty(\Omega)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^\infty(\Omega)$,

ii) pour tout $K \subset \Omega$ compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ uniformément sur K.

Exercice 5. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$f(x) = f(0) + x\psi(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. 1) Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{y \to 0+} g'(y) = \ell$ existe. Montrer que g est C^1 sur $[0, +\infty[$ et que $g'(0) = \ell$. (On utilisera le théorème des accroissements finis sur $[z, y]$ avec $0 < z < y$).

2) Soit h une fonction C^∞ impaire sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut écrire $h(y) = yh_1(y)$ avec h_1 fonction C^∞.

3) a) Soit f une fonction C^∞ paire sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On pose pour $y \in [0, +\infty[$, $g(y) = f(\sqrt{y})$. Montrer que g est C^1 sur $[0, +\infty[$. (On utilisera la première question).

b) Montrer que g est C^∞ sur $[0, +\infty[$.

4) Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux fonctions C^∞ sur $[0, +\infty[$, g_0 et g_1, telles que pour tout réel x, $f(x) = g_0(x^2) + xg_1(x^2)$.

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Montrer que :

i) si $T : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, alors il existe $K \subset \Omega$ compact et $g \in L^\infty(K)$ tels que

$$Tf = \int_K f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

ii) si $T : C(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, alors il existe $K \subset \Omega$ compact et une mesure borélienne complexe μ sur K tels que

$$Tf = \int_K f(x)\mu(\mathrm{d}x), \qquad \text{pour tout } f \in C(\Omega).$$