TD II: FONCTIONS À SUPPORT COMPACT, CONVOLUTIONS

11 MARS 2021

Exercice 1. Donner un exemple d'une fonction $f \in C_0^1(\mathbb{R})$, quadratique par morceaux.

Exercice 2 (Théorème de Borel)**.** On se donne $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, à support dans $[-2, 2]$, égale à 1 sur $[-1, 1]$. Soit $(c_n)_n$ une suite de nombres complexes et $(t_n)_n$ une suite de nombres ≥ 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$f_n(x) := c_n \phi(t_n x) \frac{x^n}{n!}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer qu'il existe une suite $(t_n)_n$ telle que $|f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$ et $x \in \mathbb{R}$.
Indictation : Soit $\phi_n(x) := \frac{\phi(x)x^n}{n!}$ et $A_n := \max_{0 \leq k < n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_n^{(k)}(x)|$. Vérifier que

$$\max_{0 \leq k < n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{|c_n| A_n}{t_n}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Soit $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que toute fonction $C^\infty([0, \infty[)$ se prolonge en une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on pose

$$A := \sup \left\{ \int_\Omega f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x ; \varphi \in C_0(\Omega), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}.$$

Montrer que $f \in L^1(\Omega)$ si, et seulement si, $A < +\infty$, et dans ce cas $A = \|f\|_{L^1}$.

Exercice 4. Montrer le dernier théorème du Chapitre II, c'est-à-dire le résultat suivant.

Théorème. *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $(\omega_j)_{j=1,\dots,m}$ un recouvrement de K par des ouverts bornés. Alors il existe des fonctions $(\varphi_j)_{j=1,\dots,m}$ telles que :*

(i) $\varphi_j \in C_0^\infty(\omega_j)$ *pour tout* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(ii) $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$ *pour tout* $j \in \{1, \dots, m\}$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$,

(iii) $\sum_{j=1}^m \phi_j(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$,

(iv) $\sum_{j=1}^m \phi_j(x) = 1$ *pour tout* $x \in K$.

Indication. Montrer d'abord qu'il existe des ouverts $(\omega'_j)_{j=1,\dots,m}$ tels que $\overline{\omega'_j} \subset \omega_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $K \subset \cup_{j=1}^m \omega'_j$. □

Exercice 2.

a) Soit $\phi_n(x) := \dfrac{\phi(x)\, x^n}{n!}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$A_n := \max_{0 \le k < n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_n^{(k)}(x)|.$$

On observe que $f_n(x) = c_n t_n^{-n} \phi_n(t_n x)$,

donc $f_n^{(k)}(x) = c_n t_n^{k-n} \phi_n^{(k)}(t_n x)$.

Si $t_n \geq 1$, alors

$$\max_{0 \le k < n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq |c_n| t_n^{-1} A_n.$$

Il suffit de prendre $t_n = \max(1, 2^n |c_n| A_n)$.

b) Puisque $t_n \geq 1$, f_n est une fonction continue à support dans $[-2, 2]$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers une fonction continue f, à support dans $[-2, 2]$.

Montrons que f est de classe C^∞.

Par un Lemme du cours, page 14 du poly, il suffit de vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ converge uniformément.

(voir plus loin un argument plus détaillé)

Mais, pour k fixe, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}$

pour n assez grand, donc en effet la série converge uniformément.

Il reste à montrer que $f^{(n)}(0) = c_n$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Il suffit de vérifier que

$$f_n^{(n)}(0) = c_n \quad \text{et} \quad f_m^{(n)}(0) = 0 \quad \text{pour } m \neq n.$$

On a $$f_m^{(n)}(0) = c_m\, t_m^{n-m}\, \phi_m^{(n)}(0),$$

donc il suffit de vérifier que $\phi_n^{(n)}(0) = 1$

et $\phi_m^{(n)}(0) = 0$ si $m \neq n$.

C'est une conséquence immédiate de la formule de Leibniz et du fait que $\phi^{(l)}(0) = 0$ si $l > 0$.

En effet, $\left(\frac{x^m}{m!}\right)^{(l)} = \frac{x^{m-l}}{(m-l)!}$ pour $0 \leq l \leq m$, donc,

si $m \geqslant n$, $$\phi_m^{(n)}(x) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \phi_m^{(n-l)}(x) \frac{x^{m-l}}{(m-l)!}$$

Si $m > n$, tous les termes de $\phi_m^{(n)}(0)$ sont nuls.

Si $m < n$, alors $\phi_m^{(n)}(x) = \sum_{l=0}^{m} \binom{n}{l} \phi_m^{(n-l)}(x) \frac{x^{m-l}}{(m-l)!}$,

et $\phi_m^{(n-l)}(0) = 0$ pour $0 \leq l \leq m$.

c) Soit g de classe C^∞ sur $[0,\infty[$.

Soit $c_n := g^{(n)}(0)$, où il s'agit des dérivées à droite.

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tq $f^{(n)}(0) = c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On définit

$$h(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Il faut montrer que $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

On montre pour cela le résultat suivant :

<u>Lemme</u> Soit $k \in \mathbb{N}$, g de classe C^k sur $[0,\infty[$, f de classe C^k sur $]-\infty, 0]$ et

$$f^{(l)}(0) = g^{(l)}(0) \qquad \text{pour} \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

(Ici, $f^{(l)}(0)$ est la l-ième dérivée à gauche de f en 0 et $g^{(l)}(0)$ est la l-ième dérivée à droite de g en 0).

Alors la fonction h définie par $(*)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

La <u>preuve</u> est par récurrence par rapport à k.

Pour $k = 0$ l'affirmation est vrai.

Pour $k = 1$, c'est un résultat bien connu d'analyse réelle ; on a en plus $h'(0) = f'(0) = g'(0)$.

Hérédité : Soit $k \geqslant 2$. Alors, d'après le résultat évoqué tout à l'heure, $h \in C^1(\mathbb{R})$ et $h'(0) = f'(0) = g'(0)$.

Par conséquent,

$$h'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x > 0 \\ f'(x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, donc, par la définition de $C^k(\mathbb{R})$, $h \in C^k(\mathbb{R})$.

$\square$

Par le Lemme, on a $h \in C^k(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

<u>Remarque</u> Dans la question b), pour montrer que f est C^∞ à support dans $[-2,2]$, on peut aussi invoquer le résultat connu du cours, disant que $C^\infty_{[-2,2]}(\mathbb{R})$, muni de la famille de sémi-normes

$$P^k_{[-2,2]}(u) := \sum_{l=0}^{k} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u^{(l)}(x)|, \quad k \in \mathbb{N},$$

est un espace de Fréchet.

On a le résultat général suivant sur les espace de Fréchet :

Théorème Soit X, muni d'une famille séparante de semi-normes $(p_j)_j$, un espace de Fréchet, et soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de X telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_j(u_n) < \infty, \qquad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge dans X.

Démonstration Pour $N \in \mathbb{N}$, soit

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} u_n .$$

On montre que $(s_N)_N$ est une suite de Cauchy. Pour cela, on utilise le Lemme 1 page 4 du poly. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$.

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} p_j(u_n) < \infty$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} p_j(u_n) < \varepsilon$.

Soit $M \geq N \geq N_0$. On a donc

$$\sum_{n=N+1}^{M} p_j(u_n) \leq \sum_{n=N_0+1}^{\infty} p_j(u_n) < \varepsilon,$$

donc par l'inégalité triangulaire

$$p_j(u_M - u_N) = p_j\left(\sum_{n=N+1}^{M} u_n\right) \leq \sum_{n=N+1}^{M} p_j(u_n) < \varepsilon,$$

donc $(s_N)_N$ est une suite de Cauchy.

Comme X est de Fréchet, $(s_N)_N$ converge, cqfd.

Maintenant, pour montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge dans $C^{\infty}_{[-2,2]}(\mathbb{R})$,

il suffit de vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{k}_{[-2,2]}(f_n) < \infty,$$

ce qui est vrai car $p^{k}_{[-2,2]}(f_n) \leq (k+1)\, 2^{-n}$

si $n > k$.