TD II: FONCTIONS À SUPPORT COMPACT, CONVOLUTIONS

11 MARS 2021

Exercice 1. Donner un exemple d'une fonction $f \in C_0^1(\mathbb{R})$, quadratique par morceaux.

Exercice 2 (Théorème de Borel)**.** On se donne $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, à support dans $[-2, 2]$, égale à 1 sur $[-1, 1]$. Soit $(c_n)_n$ une suite de nombres complexes et $(t_n)_n$ une suite de nombres strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$f_n(x) := c_n \phi(t_n x) \frac{x^n}{n!}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer qu'il existe une suite $(t_n)_n$ telle que $|f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$ et $x \in \mathbb{R}$.
Indictation : Soit $\phi_n(x) := \frac{\phi(x)x^n}{n!}$ et $A_n := \max_{0 \leq k < n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_n^{(k)}(x)|$. Vérifier que

$$\max_{0 \leq k < n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{|c_n| A_n}{t_n}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Soit $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que toute fonction $C^\infty([0, \infty[)$ se prolonge en une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on pose

$$A := \sup \left\{ \int_\Omega f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x ; \varphi \in C_0(\Omega), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}.$$

Montrer que $f \in L^1(\Omega)$ si, et seulement si, $A < +\infty$, et dans ce cas $A = \|f\|_{L^1}$.

Exercice 4. Montrer le dernier théorème du Chapitre II, c'est-à-dire le résultat suivant.

Théorème. *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $(\omega_j)_{j=1,\ldots,m}$ un recouvrement de K par des ouverts bornés. Alors il existe des fonctions $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,m}$ telles que :*

(i) $\varphi_j \in C_0^\infty(\omega_j)$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, m\}$,

(ii) $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$,

(iii) $\sum_{j=1}^m \phi_j(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$,

(iv) $\sum_{j=1}^m \phi_j(x) = 1$ *pour tout* $x \in K$.

Indication. Montrer d'abord qu'il existe des ouverts $(\omega'_j)_{j=1,\ldots,m}$ tels que $\overline{\omega'_j} \subset \omega_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ et $K \subset \cup_{j=1}^m \omega'_j$. $\square$