TD III: NOTION D'UNE DISTRIBUTION

18 MARS 2021

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre inférieur ou égal à k. Montrer qu'il existe une <u>unique</u> forme linéaire $\widetilde{T} : C_0^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ telle que $\widetilde{T}|_{C_0^\infty(\Omega)} = T$ et $\widetilde{T}|_{C_K^k(\Omega)} : C_K^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue pour tout $K \subset \Omega$ compact.

Exercice 2. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre $\leq k$ si, et seulement si, pour tout $K \subset \Omega$ compact il existe un nombre positif C tel que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

Exercice 3. Soit $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par

$$\langle T, \varphi\rangle := \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j), \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

— Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
— Montrer que T est d'ordre ∞.

Exercice 4. Soit $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 5. Soit $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable qui vérifie les conditions suivantes :
1) il existe $B \geq 0$ tel que $|K(x)| \leq B|x|^{-d}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,
2) $\int_{r<|x|<s} K(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tous $0 < r < s < \infty$.
Montrer que la formule

$$\langle \mathrm{vp}\, K, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} K(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

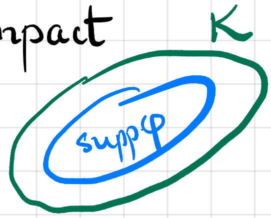
définit un élément $\mathrm{vp}\, K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, d'ordre ≤ 1. Montrer que $\mathrm{vp}\, K$ est d'ordre exactement 1 si, et seulement si, $K \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 1.

Soient $\widetilde{T}_1$, $\widetilde{T}_2$ deux formes linéaires $C_0^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ telles que $\widetilde{T}_1|_{C_0^\infty(\Omega)} = \widetilde{T}_2|_{C_0^\infty(\Omega)}$ et $\widetilde{T}_j|_{C_K^k(\Omega)} : C_K^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue pour tout $K \subset \Omega$ compact et $j \in \{1, 2\}$.

Il faut montrer que $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_2$, c'est-à-dire $\langle \widetilde{T}_1, \varphi \rangle = \langle \widetilde{T}_2, \varphi \rangle$, $\quad \forall \varphi \in C_0^k(\Omega)$.

Soit $\varphi \in C_0^k(\Omega)$, et K un ensemble compact tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathring{K}$.



Soit ρ_ε le noyau régularisant standard.

Si ε est assez petit, alors $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * \varphi) \subset K$.

On a donc que $\rho_\varepsilon * \varphi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi$ dans $C_K^k(\Omega)$.

Comme $\widetilde{T}_j|_{C_K^k(\Omega)}$ est continue,

$$\langle \widetilde{T}_1, \varphi \rangle = \langle \widetilde{T}_1, \lim_{\varepsilon \to 0^+} \rho_\varepsilon * \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle \widetilde{T}_1, \rho_\varepsilon * \varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle \widetilde{T}_2, \rho_\varepsilon * \varphi \rangle = \langle \widetilde{T}_2, \lim_{\varepsilon \to 0^+} \rho_\varepsilon * \varphi \rangle = \langle \widetilde{T}_2, \varphi \rangle.$$

Idée : approcher φ par des fonctions dans $C_K^\infty(\Omega)$

Exercice 2. Soit T une distribution d'ordre $\leq k$ et $\tilde{T}$ son extension sur $C_0^k(\Omega)$ (qui est unique, d'après l'exercice précédent).

Soit $K \subset \Omega$ compact.

$\tilde{T}|_{C_K^k(\Omega)}$ est une forme linéaire continue

sur l'espace de Banach $C_K^k(\Omega)$, la norme duquel est $\|\varphi\| := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$,

X esp. vect. normé
$T \in X^* \Leftrightarrow |T\varphi| \leq C\|\varphi\|_X \; \forall \varphi$

donc $$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle \tilde{T}, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Inversement, supposons que $\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C$ tq
$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

On construit une $\tilde{T} : C_0^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ extension de T.

Soit $\varphi \in C_0^k(\Omega)$. Soit $K \subset \Omega$ compact tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathring{K}$, et considérons $\rho_\varepsilon * \varphi$. Si $\varepsilon > 0$ assez petit, alors $\rho_\varepsilon * \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$,

et on a $\rho_\varepsilon * \varphi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi$ dans $C_K^k(\Omega)$.

On pose $$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle T, \rho_\varepsilon * \varphi \rangle.$$

Montrons que la limite existe.

Il suffit de montrer que $\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon_0 > 0$ tq si $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$, alors
$$|\langle T, \rho_{\varepsilon_1} * \varphi \rangle - \langle T, \rho_{\varepsilon_2} * \varphi \rangle| \leq \delta.$$

Mais on a

$$|\langle T, \rho_{\varepsilon_1} * \varphi\rangle - \langle T, \rho_{\varepsilon_2} * \varphi\rangle| = |\langle T, \rho_{\varepsilon_1} * \varphi - \rho_{\varepsilon_2} * \varphi\rangle|$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha(\rho_{\varepsilon_1} * \varphi - \rho_{\varepsilon_2} * \varphi)(x)|.$$

Mais $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \rho_\varepsilon * \varphi \longrightarrow \varphi$ dans $C_K^k(\Omega)$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_0$ tq si $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_0 \Rightarrow$

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha(\rho_{\varepsilon_1} * \varphi - \rho_{\varepsilon_2} * \varphi)(x)| = \|\rho_{\varepsilon_1} * \varphi - \rho_{\varepsilon_2} * \varphi\|_{C_K^k(\Omega)}$$

$$\leqslant \frac{1}{C}\,\delta.$$

$$\Rightarrow |\langle T, \rho_{\varepsilon_1} * \varphi\rangle - \langle T, \rho_{\varepsilon_2} * \varphi\rangle| \leqslant \delta.$$

Il faut montrer que :

1) $\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

2) $\widetilde{T}|_{C_K^k(\Omega)} : C_K^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue.

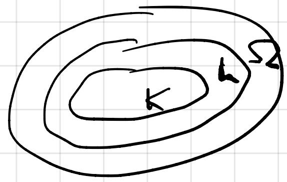
1) Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $K \subset \Omega$ tq $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathring{K}$, alors $\rho_\varepsilon * \varphi \longrightarrow \varphi$ dans $C_K^\infty(\Omega)$.

Comme T est continue sur $C_K^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle T, \rho_\varepsilon * \varphi\rangle = \langle T, \lim_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon * \varphi\rangle =$$

$$= \langle T, \varphi\rangle.$$

2) Soit $K \subset \Omega$ compact, et $L \subset \Omega$ un compact tq $K \subset \mathring{L}$.



On sait qu'il existe C tq $\varphi \in C_L^\infty(\Omega)$, alors

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in L} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \quad (*)$$

Soit $\psi \in C_K^k(\Omega)$. On veut montrer que

$$|\langle \tilde{T}, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)| .$$

Par $(*)$, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$|\langle T, \rho_\varepsilon * \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in L} |\partial^\alpha (\rho_\varepsilon * \psi)(x)| .$$

$$\downarrow \varepsilon \to 0 \qquad\qquad\qquad \downarrow \varepsilon \to 0$$

$$|\langle \tilde{T}, \psi \rangle| \qquad\qquad C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in L} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

Exercice 4.

En invoquant le résultat de l'Exercice 2, pour mq $vp\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre ≤ 1, il suffit de montrer que :

1) $\langle vp\frac{1}{x}, \varphi \rangle$ est bien défini $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

2) $\forall M>0 \quad \exists C \geq 0$ tq

$$\left|\langle vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle\right| \leq C\left(\sup_{x\in[-M,M]}|\varphi(x)| + \sup_{x\in[-M,M]}|\varphi'(x)|\right),$$

$$\forall \varphi \in C^\infty_{[-M,M]}(\mathbb{R})$$

Soit $\varphi \in C^\infty_{[-M,M]}(\mathbb{R})$. Alors

on sait que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi(tx))\,dt = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$$

$$= \varphi(0) + x\,\psi(x), \qquad \psi(x) := \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$$

en particulier, $\sup_{x\in[-M,M]}|\psi(x)| \leq \sup_{x\in[-M,M]}|\varphi'(x)|$.

On peut écrire

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx = \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\left(\varphi(0) + x\psi(x)\right)dx + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{x}\left(\varphi(0) + x\psi(x)\right)dx$$

$$= \varphi(0)\left(\int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{x}\,dx\right) + \int_{-M}^{-\varepsilon} \psi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{M} \psi(x)\,dx.$$

$$= \int_{-M}^{-\varepsilon} \psi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{M} \psi(x)dx, \quad \text{donc}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x)dx = \int_{-M}^{M} \psi(x)dx;$$

en outre,

$$\left|\langle vp\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle\right| = \left| \int_{-M}^{M} \psi(x)dx \right| \leq 2M \sup_{x \in [-M,M]} |\psi(x)|$$

$$\leq 2M \sup_{x \in [-M,M]} |\varphi'(x)|,$$

donc $vp\frac{1}{x}$ bien défini, d'ordre ≤ 1.

Il faut mq $vp\frac{1}{x}$ n'est pas d'ordre 0.

$\Big($ Autrement dit, $\exists$ intervalle $\underbrace{\text{compact}}_{[-M,M]}$ tq
$\forall C \quad \exists \varphi \in C^{\infty}_{[-M,M]}(\mathbb{R})$ tq

$$\left|\langle vp\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle\right| > C \sup_{x \in [-M,M]} |\varphi(x)|. \Big)$$

Prenons l'intervalle $[0,1]$.

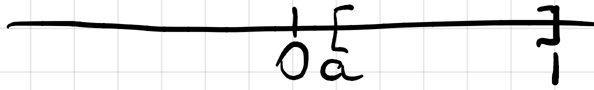
On va trouver une suite $(\varphi_n)_n$,
$\varphi_n \in C^{\infty}_{[0,1]}(\mathbb{R})$, tq $\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_n(x)| \leq 1$, $\forall n$,

mais $\left|\langle vp\tfrac{1}{x}, \varphi_n \rangle\right| \longrightarrow \infty$

Si $\varphi \in C^\infty_{[a,1]}(\mathbb{R})$, pour un certain $a>0$,

alors $$\langle vp\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$$

En effet,



$$\langle vp\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx}_{0} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx\right)$$

$$= \int_a^1 \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.$$

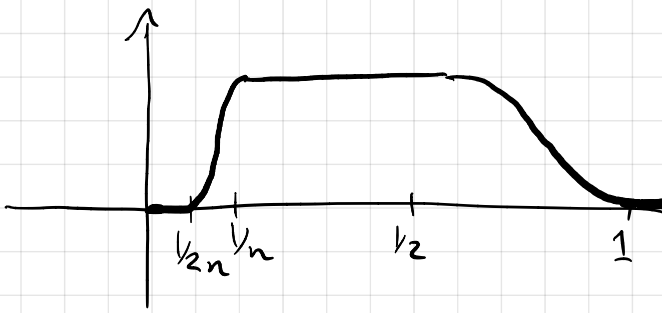
Soit φ_n une fonction C^∞ tq

- $\varphi_n \geq 0$, $\varphi_n \leq 1$
- $\varphi_n(x) = 1$ pour tout $x \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$
- $\varphi_n(x) = 0$ pour tout $x \leq \frac{1}{2n}$, et pour tout $x \geq 1$.

φ_n existe par un thm du cours :

$\Omega :=]\frac{1}{2n}, 1[$,

$K := [\frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \subset \Omega$ compact



On sait $\exists\, \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$,

$\varphi_n = 1$ sur K, $0 \leq \varphi_n \leq 1$.

On a

$$\left\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_n \right\rangle = \int_{1/2n}^{1} \frac{1}{x}\varphi_n(x)dx \geqslant \int_{1/n}^{1/2} \frac{1}{x}\varphi_n(x)dx$$

$$= \int_{1/n}^{1/2} \frac{1}{x}dx = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{n} = \ln\frac{n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty .$$

Supposons que $vp\frac{1}{x}$ soit d'ordre 0.

Il existerait alors C tq

$$\left| \left\langle vp\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \right| \leqslant C \sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|,$$

$$\forall \varphi \in C^{\infty}_{[0,1]}(\mathbb{R}).$$

En posant $\varphi = \varphi_n$, on obtiendrait

$$\ln\frac{n}{2} \leqslant \left| \left\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_n \right\rangle \right| \leqslant C \sup_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x)| = C .$$

$\forall n \in \mathbb{N}.$

Absurde.

Exercice 5.

On essaie d'appliquer le même raisonnement qu'à l'exercice précédent.

On voudrais écrire

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \psi(x), \quad \text{où } \psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d.$$

Par le Théorème Fondamental,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(tx)\, dt =$$

$$= \varphi(0) + \int_0^1 x \cdot \nabla\varphi(tx)\, dt,$$

il suffit donc de poser $\psi(x) := \int_0^1 \nabla \varphi(tx) dt.$

On remarque que $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\psi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(x)|.$

Soit $B(0,R)$ la boule de centre 0 et de rayon R.

Soit $\varphi \in C^1_{B(0,R)}(\mathbb{R}^d)$. On obtient

$$\langle vp\, K, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} K(x)\varphi(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq R} K(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq R} K(x)\left(\varphi(0) + x\cdot\psi(x)\right)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq R} K(x)\, x\cdot \psi(x)dx.$$

Mais $|K(x)x| \leq B|x|^{-d+1}$, une fonction intégrable sur $B(0,R)$.