TD III: NOTION D'UNE DISTRIBUTION

18 MARS 2021

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre inférieur ou égal à k. Montrer qu'il existe une <u>unique</u> forme linéaire $\widetilde{T} : C_0^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ telle que $\widetilde{T}|_{C_0^\infty(\Omega)} = T$ et $\widetilde{T}|_{C_K^k(\Omega)} : C_K^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue pour tout $K \subset \Omega$ compact.

Exercice 2. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre $\leq k$ si, et seulement si, pour tout $K \subset \Omega$ compact il existe un nombre positif C tel que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

Exercice 3. Soit $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j), \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

— Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
— Montrer que T est d'ordre ∞.

Exercice 4. Soit $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Montrer que $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 5. Soit $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable qui vérifie les conditions suivantes :

1) il existe $B \geq 0$ tel que $|K(x)| \leq B|x|^{-d}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

2) $\int_{r<|x|<s} K(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tous $0 < r < s < \infty$.

Montrer que la formule

$$\langle \mathrm{vp}\, K, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} K(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

définit un élément $\mathrm{vp}\, K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, d'ordre ≤ 1. Montrer que $\mathrm{vp}\, K$ est d'ordre exactement 1 si, et seulement si, $K \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.