Rqe En cours, on a montré que $T_f = 0 \Rightarrow$
$f = 0$ presque partout.
C'est un cas particulier de l'exercice 1,
parce que $T_f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{supp} T_f = \emptyset$

TD IV: SUPPORT, MULTIPLICATION, DÉRIVATION

25 MARS 2021

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et T_f la distribution associée à f. Montrer que $\operatorname{supp} T_f$ coïncide avec le support essentiel de f.

Exercice 2. Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a, b \in C^\infty(\Omega)$. Montrer que

1) $\operatorname{supp}(aT) \subset \operatorname{supp}(a) \cap \operatorname{supp}(T)$,
2) $(a + b)T = aT + bT$,
3) $a(T + S) = aT + aS$,
4) $a(bT) = (ab)T$.

Exercice 3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $(x - x_0)T = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T = \lambda\delta_{x_0}$.
2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x - x_0)^k T = 0$.

Exercice 4. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $xT = S$.

Exercice 5 (*)**.** Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $x^k T = S$.
Indication : Considérer la distribution T définie par

$$\langle T, \varphi\rangle := \left\langle S, \frac{\varphi(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\theta(x)}{x^k}\right\rangle,$$

où θ est une fonction cut-off.

Exercice 6. Montrer que $(\log|x|)' = \operatorname{vp}(1/x)$. Ensuite, montrer que

$$\left\langle \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi\right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\epsilon}\right).$$

Exercice 7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$. Ensuite, résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $xT' + T = 0$.

Ex 3

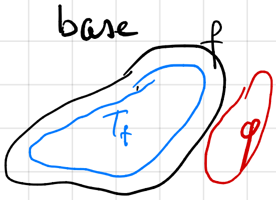
$\Leftarrow$ Si $T = \lambda\delta_{x_0}$, et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors,
soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\psi(x) := (x - x_0)\varphi(x)$. On a

$$\langle (x - x_0)T, \varphi\rangle = \langle T, (x - x_0)\varphi\rangle = \langle T, \psi\rangle$$
$$= \langle \lambda\delta_{x_0}, \psi\rangle = \lambda\psi(x_0) = 0.$$

$(x - x_0)\varphi$ signifie la fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$
définie par $\psi(x) = (x - x_0)\varphi(x)$, donc $\psi(x_0) = 0$.

Exercice 1.

Rappelons que, par définition, le support essentiel de f est le complémentaire du plus grand ouvert tel que $f = 0$ presque partout sur cet ouvert (ce qui a un sens parce que $\mathbb{R}^d$ a une base dénombrable de voisinages).



Montrons d'abord que $\operatorname{supp} T_f \subset \operatorname{ess\,supp} f \iff$

$$\iff \complement(\operatorname{ess\,supp} f) \subset \complement(\operatorname{supp} T_f) \iff (T_f)|_{\complement(\operatorname{ess\,supp} f)} = 0.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \complement(\operatorname{ess\,supp} f)$.

Alors $\displaystyle\int f\varphi = 0$, donc $(T_f)|_{\complement(\operatorname{ess\,supp} f)} = 0$,

$\iff \langle T_f, \varphi\rangle = 0$

donc $\complement(\operatorname{ess\,supp} f) \subset \complement(\operatorname{supp} T_f)$.

Montrons maintenant que $\complement(\operatorname{supp} T_f) \subset \complement(\operatorname{ess\,supp} f)$.

Soit $U := \complement(\operatorname{supp} T_f)$, $g := f|_U \in L^1_{loc}(U)$.

Alors $T_g \in \mathcal{D}'(U) = (T_f)|_U = 0$, donc

d'après le cours $f(x) = g(x) = 0$ pour presque tout $x \in U$,

donc $U \subset \complement(\operatorname{ess\,supp} f)$.

$\iff$ Si $\varphi \in C_0^\infty(U)$, alors $\langle T_g, \varphi\rangle = \langle (T_f)|_U, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle$

$\rightsquigarrow \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int g\varphi = \int f\varphi$$

D'après le cours, $(T_f)|_{\complement\operatorname{supp}(T_f)} = 0$

(Proposition, ici, avec $F = \operatorname{supp} T_f$)

Exercice 2.

2) $$(a+b)T \overset{?}{=} aT+bT.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Alors

$$\langle (a+b)T, \varphi\rangle \underset{\text{def. }(a+b)T}{=} \langle T, (a+b)\varphi\rangle =$$

$$= \langle T, a\varphi + b\varphi\rangle = \langle T, a\varphi\rangle + \langle T, b\varphi\rangle$$

$$\underset{\text{def } aT,\, bT}{=} \langle aT, \varphi\rangle + \langle bT, \varphi\rangle = \langle aT+bT, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)T = aT+bT.$$

1) $$\operatorname{supp}(aT) \overset{?}{\subset} \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T.$$

$$\Leftrightarrow \quad \complement(\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T) \subset \complement(\operatorname{supp}(aT))$$

$$\complement(\operatorname{supp} a) \cup \complement(\operatorname{supp} T) = \complement(\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a)\ \complement(\operatorname{supp} a) \subset \complement(\operatorname{supp}(aT)) \\ b)\ \complement(\operatorname{supp} T) \subset \complement(\operatorname{supp}(aT)). \end{array}$$

Ad a) Il faut montrer que

$$(aT)|_{\complement(\operatorname{supp} a)} = 0$$

donc que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset \complement(\operatorname{supp} a)$,

$$\langle aT, \varphi\rangle = 0$$

$$\langle aT, \varphi\rangle = \langle T, a\varphi\rangle,$$ mais $a\varphi = 0$.

Ad b) Il faut montrer que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ tq } \operatorname{supp}\varphi \subset \complement(\operatorname{supp} T),$$

$$\langle aT, \varphi \rangle = 0$$

$$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$$

Si $\operatorname{supp}\varphi \subset \complement(\operatorname{supp} T)$, alors $\operatorname{supp}(a\varphi) \subset \complement(\operatorname{supp} T)$

$$\Rightarrow \langle T, a\varphi \rangle = 0,$$

parce que $T_{|\complement(\operatorname{supp} T)} = 0$.

<u>Une autre manière de rédiger la solution:</u>

Soit $x_0 \notin \operatorname{supp} a$

Il faut montrer que $x_0 \notin \operatorname{supp}(aT)$,

c'est à dire $\exists V$ vois. de x_0 tq

$(aT)_{|V} = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{supp}\varphi \subset V$

$$\Rightarrow \langle aT, \varphi \rangle = 0$$

$$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$$

Prenons V vois. ouvert de x_0 tq $a(x) = 0$, $\forall x \in V$.

Alors, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset V$, on a $a\varphi = 0$,

donc $0 = \langle T, a\varphi \rangle = \langle aT, \varphi \rangle$, donc

$(aT)_{|V} = 0$, donc $x_0 \notin \operatorname{supp}(aT)$.

Exercice 3.

1) Il est clair que $(x-x_0)\,\delta_{x_0}=0$.

Réciproquement, supposons que $(x-x_0)\,T=0$.

Montrons d'abord que $\operatorname{supp} T \subset \{x_0\}$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp}\varphi \not\ni x_0$,

c'est-à-dire $\varphi \equiv 0$ au voisinage de x_0.

Alors $\frac{1}{x-x_0}\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, donc

$$\langle T,\varphi\rangle = \left\langle T, (x-x_0)\frac{1}{x-x_0}\varphi\right\rangle = \left\langle (x-x_0)T, \frac{1}{x-x_0}\varphi\right\rangle = 0.$$

D'après le cours, $T=\sum_{j=0}^{m} a_j\,\delta_{x_0}^{(j)}$, donc on veut mq $a_1=a_2=\dots=a_m=0$ et on aura $\lambda = a_0$.

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j a_j\,\varphi^{(j)}(x_0)$$

Soit $\varphi(x)=(x-x_0)\,\xi(x)$, $\xi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$

On sait que $\langle T,\varphi\rangle = 0$.

On peut prendre $\xi(x)=(x-x_0)^l\,\theta(x)$,

θ – fonction cut-off, c'est-à-dire

$\theta(x)=1$ au voisinage de x_0, $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Si on prend $l=0$, $\xi(x)=\theta(x)$,

donc $\varphi(x)=(x-x_0)\,\theta(x)$, on a

$\varphi(x_0)=0$, $\varphi'(x_0)=1$, $\varphi^{(j)}(x_0)=0$, si $j\geq 2$,

donc $0=\langle T,\varphi\rangle = -a_1 \longrightarrow a_1=0$.

Si on prend $l=1$, $\xi(x)=(x-x_0)\,\theta(x)$,

$\varphi(x)=(x-x_0)^2\theta(x)$

$\varphi(x_0)=0$, $\varphi'(x_0)=0$, $\varphi''(x_0)=2$, $\varphi^{(j)}(x_0)=0$, si $j\geq 3$

$\Longrightarrow 0=\langle T,\varphi\rangle = 2a_2 \Longrightarrow a_2=0$. etc.