TD IV: SUPPORT, MULTIPLICATION, DÉRIVATION

25 MARS 2021

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et T_f la distribution associée à f. Montrer que $\operatorname{supp} T_f$ coïncide avec le support essentiel de f.

Exercice 2. Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a, b \in C^\infty(\Omega)$. Montrer que

1) $\operatorname{supp}(aT) \subset \operatorname{supp}(a) \cap \operatorname{supp}(T)$,
2) $(a+b)T = aT + bT$,
3) $a(T+S) = aT + aS$,
4) $a(bT) = (ab)T$.

Exercice 3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $(x - x_0)T = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T = \lambda \delta_{x_0}$.
2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x - x_0)^k T = 0$.

Exercice 4. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $xT = S$.

Exercice 5 (*)**.** Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $x^k T = S$.
Indication : Considérer la distribution T définie par

$$\langle T, \varphi \rangle := \left\langle S, \frac{\varphi(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \theta(x)}{x^k} \right\rangle,$$

où θ est une fonction cut-off.

Exercice 6. Montrer que $(\log |x|)' = \operatorname{vp}(1/x)$. Ensuite, montrer que

$$\left\langle \operatorname{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big)', \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\epsilon} \right).$$

Exercice 7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$. Ensuite, résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $xT' + T = 0$.