TD V: SUITES, CONVOLUTIONS, SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES

1ER AVRIL 2021

Exercice 1. 1) Calculer la limite de la suite de distributions $T_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\delta_{\frac{p}{n}}$.

2) Calculer la limite de la suite de distributions $T_n = n\big(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\big)$.

Exercice 2. 1) Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{r\to 0+}\int_{r<|x|<1}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

en fonction de $I = \int_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}\,dx$ (On rappellera pourquoi cette intégrale est semi-convergente).

2) Montrer que pour tout $R > 0$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|<R}\mathrm{e}^{inx}\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction ψ dans $C^\infty(\mathbb{R})$.

3) Calculer la limite au sens des distributions de la suite $\mathrm{e}^{inx}\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ en fonction de I.

Exercice 3. 1) Soit $T_n = n^2x\mathrm{e}^{inx}$. Montrer que $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une limite à déterminer.

2) Même question avec $S_n = n^2|x|e^{inx}$. (On calculera $\langle S_n, \varphi\rangle$ avec φ fonction test, et on écrira $\mathrm{e}^{inx} = -in^{-1}\partial_x\mathrm{e}^{inx}$).

Exercice 4. (1) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\delta_k * (\delta_1 - \delta_0)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et déterminer sa somme.

(2) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\delta_k' * \mathbb{1}_{[0,1]}$.

(3) Déduire de la question précédente qu'il existe une distribution E à support dans $[0,+\infty]$ telle que $E * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

Exercice 5. Soit $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ donnée par $E(t,x) := \mathbb{1}_{|x|<t}$. Calculer, au sens des distributions, $\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big)E(t,x)$.

Exercice 6. On note $|x|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, $|x| := \big(\sum_{j=1}^d x_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$. On pose $\Delta := \displaystyle\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

1) Soit F une fonction C^∞ sur $]0,+\infty[$. Montrer que

$$\Delta\big(F(|x|)\big) = F''(|x|) + \frac{d-1}{|x|}F'(|x|).$$

2) On pose $f(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ pour x dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Montrer que f définit une distribution sur $\mathbb{R}^d$ et que sa restriction à $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifie $\Delta f = 0$.

3) En déduire que Δf est une combinaison linéaire finie de dérivées de la masse de Dirac en zéro.

4) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\langle \Delta f, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0+} I_\epsilon, \quad \text{où } I_\epsilon = \int_{|x|>\epsilon}\frac{1}{|x|^{d-2}}\Delta\varphi(x)\,dx.$$

5) Montrer, en utilisant la formule de Green, que $I_\epsilon = J_\epsilon - K_\epsilon$ avec

$$J_\epsilon = \int_{|x|=\epsilon} |x|^{2-d} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x)\, d\sigma_\epsilon, \;\; K_\epsilon = \int_{|x|=\epsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n} |x|^{2-d}\, d\sigma_\epsilon$$

où $d\sigma_\epsilon = \epsilon^{d-1} d\omega$ est la mesure de surface sur la sphère de rayon ϵ et $\frac{\partial}{\partial n} = -\sum_{j=1}^{d} \frac{x_j}{|x|} \frac{\partial}{\partial x_j}$ la dérivée normale unitaire.

6) Déterminer la limite de J_ϵ et K_ϵ lorsque ϵ tend vers zéro, en fonction de $\mu(\mathbb{S}^{d-1})$, mesure de la sphère unité de dimension $d-1$.

7) Calculer Δf au sens des distributions, et en déduire une solution élémentaire du Laplacien en dimension $d \geq 3$.

Exercice 2.

1) On a

$$\int_{r<|x|<1} \frac{e^{inx}}{x}\,dx = i\int_{-1}^{1} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx$$

$$= i\int_{-n}^{n} \frac{\sin(y)}{y}\,dy \longrightarrow i\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

2) Par intégration par parties,

$$\int_{|x|<R} e^{inx}\psi(x)\,dx = -\int_{|x|<R} \frac{1}{in} e^{inx}\psi'(x)dx$$

$$+\frac{1}{in}e^{inR}\psi(R) - \frac{1}{in}e^{-inR}\psi(-R) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3) $T_n := e^{inx}\,vp\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$,

$\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right), e^{inx}\varphi\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx\right) =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{inx}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{inx}}{x}\,dx\right)$$

$$+ \int_{-R}^{R} e^{inx}\psi(x)dx = iI\varphi(0) + \int_{-R}^{R} e^{inx}\psi(x)dx$$

Quand $n\to\infty$, $iI\varphi(0) + \int_{-R}^{R} e^{inx}\psi(x)dx \longrightarrow iI\varphi(0)$.

Réponse: $T_n \longrightarrow iI\delta_0$.

Exercice 3. 1) $T_n := n^2 x e^{inx}$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} n^2 x e^{inx} \varphi(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} n \left(\varphi(x) + x\varphi'(x) \right) e^{inx} dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(2\varphi'(x) + x\varphi''(x) \right) e^{inx} dx \longrightarrow 0.$$

Réponse: $T_n \to 0$.

2) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

$$\langle S_n, \varphi \rangle = \int_0^\infty n^2 x e^{inx} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 n^2 x e^{inx} \varphi(x) dx.$$

Par intégration par parties:

$$\int_0^\infty n^2 x e^{inx} \varphi(x) dx = -\frac{1}{i} \int_0^\infty n e^{inx} \left(\varphi(x) + x\varphi'(x) \right) dx$$

$$= \int_0^\infty e^{inx} \left(2\varphi'(x) + x\varphi''(x) \right) dx + \underbrace{\varphi(0)}_{\text{terme de bord}}.$$

De manière similaire,

$$\int_{-\infty}^0 n^2 x e^{inx} \varphi(x) dx \to -\varphi(0).$$

Réponse: $S_n \to 2\delta_0$.

Exercice 4.

1) On a $\delta_k * \delta_1 = \delta_{k+1}$ et $\delta_k * \delta_0 = \delta_k$,

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k * (\delta_1 - \delta_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (\delta_{k+1} - \delta_k) = \delta_n - \delta_0 .$$

Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors

$\langle \delta_n - \delta_0, \varphi \rangle \longrightarrow -\varphi(0)$, donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k * (\delta_1 - \delta_0) = -\delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

2) $$\delta_k' * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_k * (\mathbb{1}_{[0,1]})' = \delta_k * (\delta_1 - \delta_0),$$

donc $$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k' * \mathbb{1}_{[0,1]} = -\delta_0 .$$

3) Soit $E := -\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k'$. Alors

$E_n \rightarrow E$, où $E_n := -\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k'$, $E_n * \mathbb{1}_{[0,1]} \rightarrow \delta_0$,

donc par la continuité de la convolution, comme $\mathbb{1}_{[0,1]}$ est à support compact

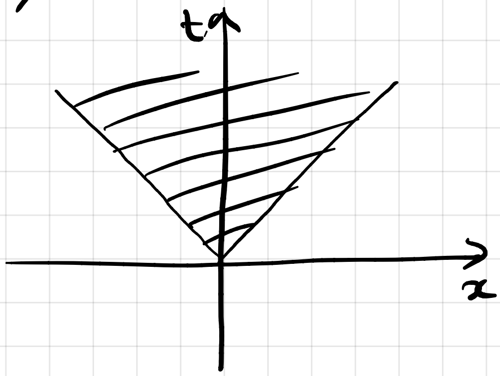
$$E * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 .$$

Exercice 5. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Par la définition de la dérivée au sens des distributions,

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E, \varphi \right\rangle = \left\langle E, \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi \right\rangle =$$

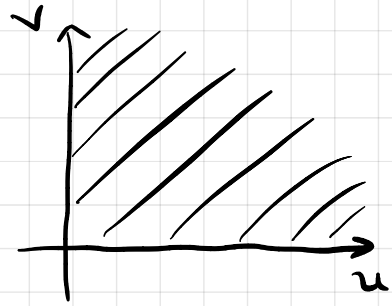
$$= \iint_{|x|<t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(t,x)\, dx\, dt.$$



Considérons le changement de variables

$$u = t+x, \qquad v = t-x,$$

$$\psi(u,v) := \varphi\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$



$\Leftrightarrow \quad \varphi(t,x) = \psi(t+x, t-x)$, donc

$$\partial_t \varphi(t,x) = \partial_u \psi(t+x,t-x) + \partial_v \psi(t+x,t-x),$$

$$\partial_t^2 \varphi(t,x) = \partial_u^2 \psi(t+x,t-x) + \partial_u\partial_v \psi(t+x,t-x) + \partial_u\partial_v \psi(t+x,t-x) + \partial_v^2 \psi(t+x,t-x),$$

$$\partial_x \varphi(t,x) = \partial_u \psi(t+x,t-x) - \partial_v \psi(t+x,t-x),$$

$$\partial_x^2 \varphi(t,x) = \partial_u^2 \psi(t+x,t-x) - \partial_u\partial_v \psi(t+x,t-x) - \partial_u\partial_v \psi(t+x,t-x) + \partial_v^2 \psi(t+x,t-x),$$

$$\partial_t^2 \varphi(t,x) - \partial_x^2 \varphi(t,x) = 4\partial_u\partial_v \psi(t+x,t-x).$$

Le jacobien de l'application $(t,x) \mapsto (u,v)$ vaut 2, donc

$$dx\, dt = \frac{1}{2}\, du\, dv, \qquad \text{donc}$$

$$\iint_{|x|<t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(t,x)\, dx\, dt = 2\int_0^\infty \int_0^\infty \partial_u\partial_v \psi(u,v)\, du\, dv =$$

$$= 2\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \partial_u \left(\partial_v \psi(u,v)\, dv\right) du \right) =$$

$$= 2\int_0^\infty \partial_u \left[\int_0^\infty \partial_v \psi(u,v)\,dv \right] du = 2\int_0^\infty \partial_u \big(-\psi(u,0)\big)\,du =$$
$$= 2\psi(0,0),$$

la dérivation sous le signe $\int$ étant justifiée par le fait que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

On a donc $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E = 2\delta_0$,

c'est-à-dire $\frac{1}{2}E$ est une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

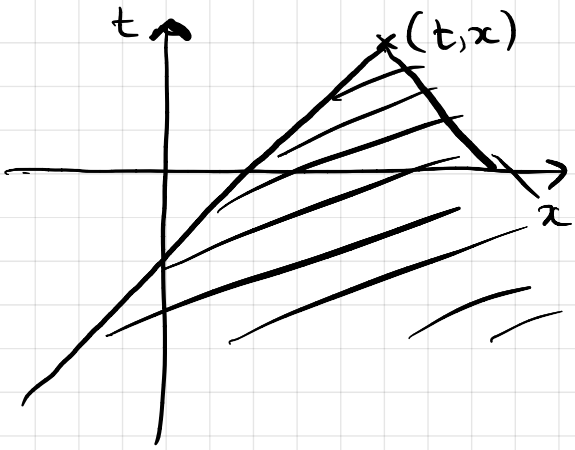
Application Soit f une fonction intégrable à support compact.

Une solution particulière de l'équation d'onde $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = f$ est donnée par

$$u = \left(\tfrac{1}{2}E\right) * f.$$

On peut voir facilement que cette dernière distribution est en fait une fonction, donnée par

$$(*) \quad \left(\left(\tfrac{1}{2}E\right)*f\right)(t,x) = \frac{1}{2}\iint_{|y|<s} f(t-s, x-y)\,dy\,ds$$



En effet, il existe $R \geq 0$ et une suite de fonctions $(f_n)_n$ dans C^∞, à support dans $B(0,R)$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0.$$

Par le thm page 63 du poly,

$\left(\frac{1}{2}E\right) * f_n$ est une fonction lisse donnée par

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}E\right) * f_n\right)(t,x) = \left\langle \tfrac{1}{2}E, f_n((t,x)-\cdot)\right\rangle =$$

$$\binom{*}{*} \quad = \frac{1}{2} \iint_{|y|<s} f_n(t-s, x-y)\, dy\, ds$$

Comme $f_n \rightharpoonup f$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, la continuité de la convolution, page 66, implique

$$\left(\tfrac{1}{2}E\right) * f_n \rightharpoonup \left(\tfrac{1}{2}E\right) * f.$$

D'un autre côté $\binom{*}{*}$, et le fait que $f_n \to f$, dans L^1 et $\mathrm{supp}(f_n) \subset B(0,R)$ pour tout n, implique

$$\frac{1}{2} \iint_{|y|<s} f_n(t-s, x-y)\, dy\, ds \longrightarrow \frac{1}{2} \iint_{|y|<s} f(t-s, x-y),$$

uniformément en (t,x), donc $\left(\frac{1}{2}E\right) * f$ est la fonction continue donnée par $(*)$.

<u>Remarque</u> La solution élémentaire $\frac{1}{2}E$ n'est pas la seule solution élémentaire de $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, mais c'est la seule qui vérifie "no incoming radiation condition", c'est-à-dire le système est en repos pour les temps négatifs et décrit la "réponse" du système initialement en repos à une exitation en $(t,x) = (0,0)$ par un delta de Dirac.

Exercice 6.

1) Notons $r(x) := |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$.

Par Chain Rule, $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x_j^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}$,

$$\partial_{x_j}(F(r)) = F'(r)\frac{x_j}{r}$$

$$\partial_{x_j}^2(F(r)) = F''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + F'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right),$$

$$\Delta(F(r)) = \sum_{j=1}^{d}\left[F''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + F'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}F''(r)\sum_{j=1}^{d} x_j^2 + \frac{d}{r}F'(r) - \frac{1}{r^3}F'(r)\sum_{j=1}^{d} x_j^2$$

$$= F''(r) + \frac{d}{r}F'(r) - \frac{1}{r}F'(r) = F''(r) + \frac{d-1}{r}F'(r).$$

2) $f(x) := |x|^{2-d}$.

f est une fonction localement intégrable, donc définit une distribution.

En effet, l'intégrabilité sur tout compact qui ne contient pas 0 est claire.

Sur $B(0,1)$, on a

$$\int_{B(0,1)} f(x)\,dx = \sigma_d \int_0^1 r^{2-d} r^{d-1}\,dr = \frac{1}{2}\sigma_d,$$

où σ_d est l'aire de la sphère unité.

Par la question 1), pour $F(r) = r^{2-d}$, si $x \neq 0$, alors

$$\Delta f(x) = F''(r) + \frac{d-1}{r}F'(r) = (2-d)(1-d)r^{-d} + (d-1)(2-d)r^{-d}$$
$$= 0.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tq $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$. Alors

$$\langle \Delta T_f, \varphi\rangle = \langle T_f, \Delta\varphi\rangle = \langle f, \Delta\varphi\rangle =$$

$$= \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\Delta\varphi(x)dx = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \Delta f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

donc $$(\Delta T_f)|_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} = 0,$$

3) $\operatorname{supp}(\Delta T_f) \subset \{0\}$, et un thm du cours

implique qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_\alpha \in \mathbb{C}$ pour $|\alpha| \leq k$ tq

$$\Delta T_f = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$$

4) On a

$$\langle \Delta f, \varphi\rangle = \langle f, \Delta\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^{d-2}} \Delta\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{|x|\leq\varepsilon} \frac{1}{|x|^{d-2}} \Delta\varphi(x)dx + I_\varepsilon .$$

$\Delta\varphi$ est une fonction bornée, donc le premier terme tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, et on a

$$\langle \Delta f, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon .$$

5) Par la formule de Green,

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{|x|^{d-2}} \Delta\varphi(x)dx =$$

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|^{d-2}} \partial_n\varphi(x)\, d\sigma_\varepsilon - \int_{|x|>\varepsilon} \nabla\left(\frac{1}{|x|^{2-d}}\right)\cdot \nabla\varphi(x)dx =$$

$$= J_\varepsilon - \int_{|x|=\varepsilon} \partial_n\left(\frac{1}{|x|^{2-d}}\right)\varphi(x)\,d\sigma_\varepsilon + \int_{|x|>\varepsilon} \Delta\left(\frac{1}{|x|^{2-d}}\right)\varphi(x)\,dx$$

$$= J_\varepsilon - K_\varepsilon, \qquad \text{car} \quad \Delta\left(\frac{1}{|x|^{2-d}}\right) = 0.$$

6) On observe que

$$|J_\varepsilon| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(x)| \int_{|x|=\varepsilon} |x|^{2-d}\,d\sigma_\varepsilon, \quad \text{et que}$$

$$\int_{|x|=\varepsilon} |x|^{2-d}\,d\sigma_\varepsilon = \int_{|y|=1} \varepsilon^{2-d}\,\varepsilon^{d-1}\,d\sigma = \varepsilon\,\mu(\mathbb{S}^{d-1}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

donc $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = 0.$

Concernant K_ε, on voit que $\frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-d} = (d-2)|x|^{1-d}$,

$$K_\varepsilon = \varphi(0)\int_{|x|=\varepsilon} (d-2)\,|x|^{1-d}\,d\sigma_\varepsilon + \int_{|x|=\varepsilon} (\varphi(x)-\varphi(0))(d-2)\,|x|^{1-d}\,d\sigma_\varepsilon,$$

$$\int_{|x|=\varepsilon} (d-2)\,\varepsilon^{1-d}\,d\sigma_\varepsilon = (d-2)\int_{|y|=1} d\sigma = (d-2)\,\mu(\mathbb{S}^{d-1}),$$

$$\left|\int_{|x|=\varepsilon} (\varphi(x)-\varphi(0))\,(d-2)\,|x|^{1-d}\,d\sigma_\varepsilon\right| \leqslant$$

$$\sup_{|x|=\varepsilon} |\varphi(x)-\varphi(0)|\;(d-2)\underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{1-d}\,d\sigma_\varepsilon}_{\text{const} = \mu(\mathbb{S}^{d-1})} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

par la continuité de φ.

On en déduit que $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = (d-2)\,\mu(\mathbb{S}^{d-1})\,\varphi(0).$

7) Les questions 4) 5) 6) impliquent

$$\langle \Delta f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} (J_\varepsilon - K_\varepsilon) = (2-d)\mu(\mathbb{S}^{d-1})\varphi(0),$$

autrement dit $\Delta f = (2-d)\mu(\mathbb{S}^{d-1})\,\delta_0$,

au sens des distributions.

On obtient une solution élémentaire

$$E(x) = \frac{1}{(2-d)\mu(\mathbb{S}^{d-1})} f(x) = \frac{1}{(2-d)\mu(\mathbb{S}^{d-1})|x|^{d-2}}.$$

<u>Application</u> Si g est une fonction continue à support compact, alors une solution particulière de l'équation $\Delta u = g$ est

$$u(x) = -\frac{1}{(d-2)\mu(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(y)}{|x-y|^{d-2}}\, dy,$$

ce qui peut être justifié de manière similaire à ce que j'ai écrit dans la Remarque après la solution de l'exercice 5.

$E(x)$ n'est pas la seule solution élémentaire du laplacien, mais c'est la seule qui converge vers 0 quand $|x| \to \infty$.