TD V: SUITES, CONVOLUTIONS, SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES

1ER AVRIL 2021

Exercice 1. 1) Calculer la limite de la suite de distributions $T_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}$.

2) Calculer la limite de la suite de distributions $T_n = n\big(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\big)$.

Exercice 2. 1) Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{r\to 0+} \int_{r<|x|<1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

en fonction de $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ (On rappellera pourquoi cette intégrale est semi-convergente).

2) Montrer que pour tout $R > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|<R} \mathrm{e}^{inx}\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction ψ dans $C^\infty(\mathbb{R})$.

3) Calculer la limite au sens des distributions de la suite $\mathrm{e}^{inx}\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ en fonction de I.

Exercice 3. 1) Soit $T_n = n^2 x \mathrm{e}^{inx}$. Montrer que $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une limite à déterminer.

2) Même question avec $S_n = n^2|x|e^{inx}$. (On calculera $\langle S_n, \varphi\rangle$ avec φ fonction test, et on écrira $\mathrm{e}^{inx} = -in^{-1}\partial_x \mathrm{e}^{inx}$).

Exercice 4. (1) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k * (\delta_1 - \delta_0)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et déterminer sa somme.

(2) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta'_k * \mathbb{1}_{[0,1]}$.

(3) Déduire de la question précédente qu'il existe une distribution E à support dans $[0, +\infty]$ telle que $E * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

Exercice 5. Soit $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ donnée par $E(t,x) := \mathbb{1}_{|x|<t}$. Calculer, au sens des distributions, $\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big)E(t,x)$.

Exercice 6. On note $|x|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, $|x| := \big(\sum_{j=1}^d x_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$. On pose $\Delta := \displaystyle\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

1) Soit F une fonction C^∞ sur $]0, +\infty[$. Montrer que

$$\Delta\big(F(|x|)\big) = F''(|x|) + \frac{d-1}{|x|}F'(|x|).$$

2) On pose $f(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ pour x dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Montrer que f définit une distribution sur $\mathbb{R}^d$ et que sa restriction à $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifie $\Delta f = 0$.

3) En déduire que Δf est une combinaison linéaire finie de dérivées de la masse de Dirac en zéro.

4) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\langle \Delta f, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0+} I_\epsilon, \quad \text{où } I_\epsilon = \int_{|x|>\epsilon} \frac{1}{|x|^{d-2}}\Delta\varphi(x)\,dx.$$

5) Montrer, en utilisant la formule de Green, que $I_\epsilon = J_\epsilon - K_\epsilon$ avec

$$J_\epsilon = \int_{|x|=\epsilon} |x|^{2-d} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x)\, d\sigma_\epsilon,\ K_\epsilon = \int_{|x|=\epsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n} |x|^{2-d}\, d\sigma_\epsilon$$

où $d\sigma_\epsilon = \epsilon^{d-1} d\omega$ est la mesure de surface sur la sphère de rayon ϵ et $\frac{\partial}{\partial n} = -\sum_{j=1}^{d} \frac{x_j}{|x|} \frac{\partial}{\partial x_j}$ la dérivée normale unitaire.

6) Déterminer la limite de J_ϵ et K_ϵ lorsque ϵ tend vers zéro, en fonction de $\mu(\mathbb{S}^{d-1})$, mesure de la sphère unité de dimension $d-1$.

7) Calculer Δf au sens des distributions, et en déduire une solution élémentaire du Laplacien en dimension $d \geq 3$.