Analyse harmonique, option “Distributions”

Université Sorbonne Paris Nord, M1-Math

Examen du 20/04/2021, (2ème partie, durée 1h30)

Instructions.

— Vous pouvez utiliser vos notes et d’autres documents.
— Écrivez vos solutions en utilisant des phrases complètes en langue française. Essayez s’il vous plaît d’écrire lisiblement.
— Vous pouvez utiliser tout résultat énoncé dans les notes de cours ou dans les DM, mais les résultats obtenus dans les TD doivent être redémontrés.
— Le barème de cette deuxième partie est sur 15 points.
— Les problèmes sont triés en ordre croissant de difficulté, selon moi.
— Dans le Problème 2, vous pouvez utiliser chaque sous-problème dans la suite de la solution, même si vous ne l’avez pas résolu.
— Les solutions sont à déposer en utilisant le lien “cloud” personnel. N’oubliez-pas de numéroter les pages.

Problème 1. (2 points) Soit $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ le delta de Dirac en 0 et $\delta_0' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sa dérivée. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ tels que

$$f\delta_0' = c_0\delta_0 + c_1\delta_0'.$$

Problème 2. (8 points) Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on pose

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0^+} \iint_{x^2+y^2\geq\epsilon^2} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que cette formule a un sens et définit un élément $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ d'ordre exactement 1.

Indications :

(a) Posons $\psi(x,y) := \int_0^1 \partial_x\varphi(tx,ty)\,\mathrm{d}t$ et $\xi(x,y) := \int_0^1 \partial_y\varphi(tx,ty)\,\mathrm{d}t$. Vérifier que $\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + x\psi(x,y) + y\xi(x,y)$.

(b) En utilisant les coordonnées polaires, vérifier que les fonctions $\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ sont localement intégrables.

(c) Montrer que, si $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R)$ (boule dans $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon R), alors

$$\langle T, \varphi\rangle = \iint_{B(0,R)} \left(\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\psi(x,y) + \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\xi(x,y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

En déduire que T est d'ordre ≤ 1.

(d) Pour $n \in \{1,2,3,\ldots\}$, soit

$$\varphi_n(x,y) := \frac{\chi(x^2+y^2)(1-\chi(n(x^2+y^2)))xy}{x^2+y^2},$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur $[-1,1]$ et à support dans $[-2,2]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle = \infty$. En déduire que T est d'ordre exactement 1.

Problème 3. (5 points) Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact. Pour $n \in \{1,2,3,\ldots\}$, soit S_n définie par

$$\langle S_n, \varphi\rangle := \langle S, x \mapsto \varphi(x/n)\rangle, \qquad \text{pour toute } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Montrer que $S_n \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ pour tout n, et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $S_n \rightharpoonup \lambda\delta_0$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ lorsque $n \to \infty$.