Institut Galilée

Filière M1

2021 - 2022

DISTRIBUTIONS

Jacek Jendrej (CNRS et USPN)

jendrej@math.univ-paris13.fr

(d'après les notes de cours du même titre par prof. Jean-Marc Delort, USPN)

Informations pratiques

Horaires

* CM les mardis 9h00 - 12h15, C311
* TD les vendredis 9h00 - 12h15, C304

Examen

date à préciser.

DM

10% de la note finale.

Chapitre I. Espaces de Fréchet

Définition 1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Une semi-norme est une fonction $p : X \to [0, \infty[$ ayant les propriétés suivantes :

i) $p(u+v) \leq p(u) + p(v) \quad \forall u, v \in X$

ii) $p(\lambda u) = |\lambda| \, p(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ u \in X.$ $\boxtimes$

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $p_1, p_2, \dots$ une suite de semi-normes

Définition 2. On dit que la suite de semi-normes $(p_j)_j$ est séparante si $\forall\, u \in X \setminus \{0\}$ il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_j(u) > 0$. $\boxtimes$

Définition 3. Soit $p_1, p_2, \dots$ une suite séparante de semi-normes. On dit qu'un ensemble $\mathcal{U} \subset X$ est ouvert si $\forall\, u \in \mathcal{U}$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ v \in X : \ p_j(v-u) < \varepsilon \text{ pour tout } j \leq j_0 \} \subset \mathcal{U}.$$

Proposition 2. La fonction $d : X \times X \to [0, \infty[$ définie par

$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(v-u)}{1 + p_j(v-u)}$$

est une distance et induit la topologie déf. ci-dessus.

<u>Démonstration</u> Posons d'abord

$$d_0(u) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(u)}{1+p_j(u)}.$$

On montre que d_0 a les propriétés suivantes :

i) $d_0(u) = 0 \implies u = 0$

ii) $d_0(u+v) \leq d_0(u) + d_0(v), \quad \forall u, v \in X$

La première propriété résulte directement du fait que la famille $(p_j)_j$ est séparante.

Pour montrer ii) il suffit de voir que

$$\frac{p_j(u+v)}{1+p_j(u+v)} \leq \frac{p_j(u)}{1+p_j(u)} + \frac{p_j(v)}{1+p_j(v)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction $f(t) := \frac{t}{1+t}$ est croissante et concave pour $t \geq 0$. Posons $a := p_j(u)$, $b := p_j(v)$, on a donc $p_j(u+v) \leq a+b$ et

$$f(p_j(u+v)) \leq f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$

Les propriétés i) et ii) impliquent facilement que d est une distance.

Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert selon la Déf. 3, et $u \in U$. Soit j_0 et ε donnés par la Déf. 3. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $\varepsilon \leq 1$.

Soit $v \in X$ tel que $d(u,v) < 2^{-j_0-1}\varepsilon$.

La définition de la distance d implique alors

$$\frac{1}{2^j} \frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} < 2^{-j_0-1}\varepsilon \quad , \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, $\forall j \leq j_0$ on a

$$\frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} < \frac{1}{2}\varepsilon \Leftrightarrow (2-\varepsilon)\, p_j(v-u) < \varepsilon,$$

donc $p_j(v-u) < \varepsilon$ pour tout $j \leq j_0$, ce qui implique $v \in U$. Ainsi, la topologie de la Définition 3 est <u>moins fine</u> que la topologie induite par d.

Pour montrer qu'elle est aussi <u>plus fine</u>, il suffit de prouver que pour tout $u \in X$, $\tilde{\varepsilon} > 0$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon \quad \forall j \leq j_0\} \subset \{v \in X : d(u,v) < \tilde{\varepsilon}\}.$$

Pour cela, il suffit de prendre $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-j_0} < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$, et $\varepsilon < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$.

Puisque X est un espace métrique, il est clair ce que signifient la convergence de suites et la notion d'une suite de Cauchy.

Lemme 1. Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de X :

1) converge vers u si et seulement si
$$\lim_{n\to\infty} p_j(u_n - u) = 0, \quad \text{pour tout } j\in\mathbb{N}^*.$$

2) est une suite de Cauchy si et seulement si $\forall \varepsilon>0,\ j\in\mathbb{N}^*$ $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tel que
$$p_j(u_m - u_n) < \varepsilon \quad \text{pour tous } m,n \geq N_0$$

$\boxtimes$

Si $(p_j)_j$ est une suite de semi-normes, alors en remplaçant p_j par $\max\limits_{l\leq j} p_l$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $(p_j)_j$ est une suite croissante, c'est-à-dire
$$p_j(u) \leq p_{j+1}(u) \quad \text{pour tous } u\in X \text{ et } j\in\mathbb{N}^*.$$

Proposition 2. Soit X un espace vectoriel, muni d'une famille croissante de semi-normes $(p_j)_j$. Une forme linéaire $T : X \to \mathbb{C}$ est continue si, et seulement si, il existe $j\in\mathbb{N}^*$ et $C>0$ tels que
$$|Tu| \leq C p_j(u), \quad \forall u\in X.$$

Démonstration

Soit $T : X \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que
$$|Tu| \leq C p_j(u), \quad \forall u\in X,$$
et soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers 0.

En particulier, $p_j(u_n) \to 0$ (voir Lemme 1) donc $Tu_n \to 0$, autrement dit T est continue en $u=0$. La linéarité implique que T est continue.

Inversement, supposons que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_j \in X$ tel que

$$|Tu_j| > j\, p_j(u_j).$$

Considérons la suite $v_j := \dfrac{u_j}{|Tu_j|}$.

Par l'homogénéité,

$$p_j(v_j) = \frac{1}{|Tu_j|} p_j(u_j) < \frac{1}{j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose la famille $(p_j)_j$ croissante, donc $\forall\, j \geq k$ on a $p_k(v_j) \leq p_j(v_j) \leq \frac{1}{j}$, ce qui implique $\lim\limits_{j \to \infty} p_k(v_j) = 0$.

Par le Lemme 1 de la page précédente, $v_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans X.

Mais $|Tv_j| = \left| T \dfrac{u_j}{|Tu_j|} \right| = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que T n'est pas continue.

Définition Soit X un espace vectoriel, muni d'une topologie induite par une famille séparante de semi-normes. On dit que X est un *espace de Fréchet* si X, vu comme un espace métrique, est complet.

Exemples

1) Si X est un espace de Banach, alors X est aussi un espace de Fréchet.
En effet, il suffit de poser $p_1(u) := \|u\|_X$ et $p_j(u) = 0$ pour tout $j \geq 2$.

2) Soit $X := \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ l'espace des suites de nombres complexes $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots)$ et posons
$$p_j(u) := |u^{(j)}|$$
Montrons que X est un espace de Fréchet.
Soit $(u_0, u_1, \dots)$ une suite de Cauchy dans X. Par le Lemme 1, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_0^{(j)}, u_1^{(j)}, \dots)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc elle converge vers $u^{(j)} \in \mathbb{C}$.
Encore une fois par le Lemme, $u_n \to u$ dans X.

3) Soit $C(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ et posons

$$p_j(u) := \sup_{|x| \leq j} |u(x)|.$$

Alors $C(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Fréchet.

4) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des fonctions mesurables $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telles que $\int_K |u(x)|^p \, dx < \infty$ pour tout $K \subset \mathbb{R}^d$ compact $\left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in K} |u(x)| \text{ si } p = \infty \right)$.

Posons $\displaystyle p_j(u) := \left(\int_{|x| \leq j} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$.

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est alors un espace de Fréchet.

$\boxtimes$

<u>Théorème 1.</u> Soit X un espace de Fréchet, dont la topologie est donnée par une suite croissante de semi-normes $(p_j)_j$, et soit $(T_n)_n$ une suite de formes linéaires continues $T_n : X \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_n |T_n u| < \infty, \quad \forall u \in X.$$

Alors il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$|T_n u| \leq C p_j(u), \quad \forall n \in \mathbb{N}, u \in X.$$

<u>Démonstration</u> La preuve est basée sur le théorème de Baire, et ressemble beaucoup à la preuve habituelle du théorème de Banach-Steinhaus.

Considérons les ensembles

$$A_m := \{u \in X : \sup_n |T_n u| \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Par l'hypothèse, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} A_m = X$.

Chaque A_m, étant une intersection d'ensembles fermés, est un ensemble fermé.

Par le théorème de Baire, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que A_m est d'intérieur non vide.

Il existe donc $u \in X$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon\} \subset A_m.$$

On observe que A_m est convexe et symétrique par rapport à 0, donc

$$p_j(v-u) < \varepsilon \Rightarrow p_j(u-v) = p_j((2u-v)-u) < \varepsilon \Rightarrow 2u-v \in A_m$$
$$\Rightarrow v-2u \in A_m,$$

donc $\frac{1}{2}(v + (v-2u)) = v-u \in A_m$,

autrement dit

$$p_j(w) < \varepsilon \Longrightarrow w \in A_m \Longrightarrow \sup_n |T_n w| \leq m,$$

et on obtient $\sup_n |T_n w| \leq \frac{m}{\varepsilon} p_j(w)$. $\square$

Chapitre II Espaces de fonctions différentiables

1. Les espaces $C^k(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert. On pose

$$C(\Omega) = C^0(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ u \text{ est continue sur } \Omega \}$$

$$C^1(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ u \text{ admet des dérivées partielles d'ordre } 1, \text{ continues sur } \Omega \}$$

$$:= \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ \forall\, i = 1, \dots, d, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existe et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega) \right\}$$

Par récurrence, on peut définir

$$C^k(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ \forall\, i = 1 \dots d, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existe et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega) \right\}$$

On pose $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.

__Exercise 1.__ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
De plus, si $u, v \in C^k(\Omega)$, alors $uv \in C^k(\Omega)$.

__Définition / Notation__ Un __multi-indice__ est un élément $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. On pose

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d \qquad (\underline{\text{longueur}} \text{ de } \alpha),$$

$$\alpha! := (\alpha_1!) \dots (\alpha_d!)$$

$$\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on écrit

$$\alpha \geq \beta \iff \beta \leq \alpha \iff \forall\, i = 1, \dots, d \quad \beta_i \leq \alpha_i$$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $\alpha \geq \beta$, on définit $\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_d - \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ et on pose

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} = \prod_{i=1}^{d} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \qquad (\text{"coefficient binomial"})$$

Exercice 2. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $u \in C^k(\Omega)$, $0 \leq l \leq k$ et $i_j \in \{1, \dots, d\}$ pour $j = 1, \dots, l$.

Pour $m \in \{1, \dots, d\}$, posons

$$\alpha_m := \#\{ j : i_j = m \},$$

et soit $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

Montrer que

* $|\alpha| = l$
* $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} u$ existe et est continue sur Ω
* $\partial^\alpha u$ existe et est continue sur Ω
* $\frac{\partial}{\partial x_{i_l}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{l-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} u = \partial^\alpha u$.

Exercice 3. (Formule de Newton)

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on pose $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.

Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta},$$

où la somme est étendue sur l'ensemble de tous les multi-indices $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $\beta \leq \alpha$.

Exercise 4. (Formule de Leibniz)

Soit $u, v \in C^k(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$.

Alors $$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v).$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$ la norme euclidienne de x.

Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, on pose

$$d(x, F) := \inf_{y \in F} |x - y|.$$

Lemme 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \, ; \, |x| \leq j \text{ et } d(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{j} \right\}.$$

Alors

i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, K_j est un sous-ensemble compact de Ω et $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$,

ii) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \mathring{K}_j = \Omega$

iii) Si $K \subset \Omega$ est un ensemble compact, alors il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_j$

Remarque Une suite de sous-ensembles compacts de Ω vérifiant les conditions i), ii) et iii) est appelée une suite exhaustive de compacts de Ω.

Exercice 5. Démontrer le Lemme 1.

Par la suite, $(K_j)_j$ est toujours la suite exhaustive de compacts définie dans le Lemme 1.

<u>Définition</u> (Semi-normes et pseudo-boules)
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $u \in C^k(\Omega)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$p_j^k(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha u(x)|.$$
Pour $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, on pose
$$V_j^k(\varepsilon) := \{ u \in C^k(\Omega) \ ; \ p_j^k(u) < \varepsilon \}$$
(pseudo-boule de centre 0 et de rayon ε).

<u>Définition</u> (Topologie sur $C^k(\Omega)$)
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} \subset C^k(\Omega)$. On dit que $\mathcal{U}$ est un ensemble <u>ouvert</u> dans $C^k(\Omega)$ si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que
$$u + V_j^k(\varepsilon) := \{ u + v \ ; \ v \in V_j^k(\varepsilon) \} \subset \mathcal{U}.$$
$\boxtimes$

Pour montrer que cette condition définit une topologie, il suffit, comme on l'a vu au Chapitre I, que la famille $(p_j^k)_j$ soit séparante, ce qui est vrai.

Définition (Topologie sur $C^\infty(\Omega)$)

Soit $\mathcal{U} \subset C^\infty(\Omega)$. On dit que $\mathcal{U}$ est un ensemble <u>ouvert</u> dans $C^\infty(\Omega)$ si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ u + v \; ; \; v \in C^\infty(\Omega) \cap V_j^k(\varepsilon) \} \subset \mathcal{U}.$$

Remarque La topologie est définie ici par la famille <u>dénombrable</u> de semi-normes (p_j^k), indexée par $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On est donc toujours dans le cadre du Chapitre I.

Exercice 6. Montrer que c'est la moins fine topologie sur $C^\infty(\Omega)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'injection $C^\infty(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ est continue.

Proposition Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^k(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^k(\Omega)$, pour la topologie ci-dessus,

ii) $\forall K \subset \Omega$ compact et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$,

$\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ uniformément sur K.

Démonstration. Rappelons que, par le Lemme 1 du Chapitre I, $u_n \to u$ si et seulement si

$$\lim_{n \to \infty} p_j^k(u_n - u) = 0, \qquad \text{pour tout } j.$$

En remplaçant u_n par $u_n - u$, on se ramène au cas $u = 0$.

i) ⇒ ii) Soit j tel que $K \subset K_j$.

Alors $\lim_{n\to\infty} p_j^k(u_n) = 0 \Rightarrow \partial^\alpha u_n \to 0$ unif. sur K_j, donc aussi sur K, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq k$.

ii) ⇒ i) K_j est un compact, donc
$$\lim_{n\to\infty} p_j^k(u_n) = 0.$$
$\square$

Proposition Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^\infty(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^\infty(\Omega)$, pour la topologie ci-dessus,

ii) $\forall K \subset \Omega$ compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$,
$$\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u \quad \text{uniformément sur } K.$$

Exercice 7. Démontrer cette proposition. $\boxtimes$

Théorème 1. Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega)$ est un espace de Fréchet. $\boxtimes$

Le reste de cette section est consacré à une démonstration du Théorème 1 et sera abordé en TD.

Lemme Si $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1((a,b))$ telle que $f_n \to f$ et $f_n' \to g$ uniformément sur (a,b), où f et g sont des fonctions bornées continues, alors $f \in C^1((a,b))$ et $f' = g$.

Démonstration Soit $c \in (a,b)$ et
$$\tilde{f}(x) := f(c) + \int_c^x g(y)\,dy, \quad \forall x \in (a,b).$$

On sait que $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(y)\,dy$.

On en déduit que $f_n(x) \to \tilde{f}(x)$, donc $f = \tilde{f}$. $\square$

On obtient facilement une version en dimension d :

<u>Lemme</u> Soit $J := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1(J)$ telle que $f_n \to f$ et $\partial_{x_i} f_n \to g_i$ uniformément sur J, où f et g_i sont des fonctions bornées continues, alors $f \in C^1(J)$ et $\partial_{x_i} f = g_i$.

<u>Démonstration</u> En fixant toutes les variables sauf une et en appliquant le lemme précédent, on trouve que $\partial_{x_i} f = g_i$.

<u>Corollaire</u> Soit $J := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^k(J)$ telle que $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ uniformément sur J, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq k$, où g_α sont des fonctions bornées continues, alors $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C^k(J)$ et $\partial^\alpha f = g_\alpha$ $\forall |\alpha| \leq k$.

<u>Démonstration</u> Récurrence par rapport à k.

Pour $k = 1$ c'est le dernier lemme.

Soit $k \geq 2$. On obtient, par l'hypothèse de récurrence, $g_i := \lim_{n\to\infty} \partial_{x_i} f_n \in C^{k-1}(J)$.

Comme $\partial_{x_i} f = g_i$, on obtient la conclusion.

<u>Démonstration du Théorème 1.</u>

Considérons d'abord le cas $k \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.

Par le Lemme 1 du Chapitre I, on voit que $\partial^\alpha u_n|_{\mathring{K}_j}$ est une suite de Cauchy pour la norme sup, $\forall |\alpha| \leq k$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

On déduit du Corollaire que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe $v_j \in C^k(\mathring{K}_j)$ tq

$$\partial^\alpha u_n \longrightarrow \partial^\alpha v_j \quad \text{unif. sur} \quad \mathring{K}_j .$$

On définit une fonction $v : \Omega \to \mathbb{C}$ par la condition $v(x) = v_j(x)$ si $x \in \mathring{K}_j$.

Alors v est bien défini, $v \in C^k(\Omega)$ et $u_n \longrightarrow v$ dans $C^k(\Omega)$.

La preuve dans le cas $C^\infty(\Omega)$ est similaire.

2. Fonctions de classe C^k à support compact.

Définition Soit $u \in C(\Omega)$. On appelle le support de u l'ensemble

$$\operatorname{supp} u := \Omega \cap F \quad \text{où} \quad F := \overline{\{x \in \Omega \,;\, u(x) \neq 0\}}$$

Comme F est un fermé de $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{supp} u$ est un fermé de Ω. Il est caractérisé par

$$x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u \iff x_0 \in \Omega \text{ et } \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow u(x) = 0.$$

Proposition L'ensemble $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ est le plus grand ouvert sur lequel la fonction u soit nulle.

Démonstration Soit U un ouvert tel que $u(x) = 0$ pour tout $x \in U$, et soit $x_0 \in U$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow x \in U \Rightarrow u(x) = 0$, donc $x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$.

Cela signifie que $U \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. □

Définition Soit $K \subset \Omega$ un compact, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note $C^k_K(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\, \operatorname{supp} u \subset K\}$ l'espace des fonctions C^k à support inclus dans K.

Remarque On voit que $C^\infty_K(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k_K(\Omega)$.

Définition (semi-normes)

Si $K \subset \Omega$ compact, $k \in \mathbb{N}$ et $u \in C^k_K(\Omega)$, on pose

$$p^k_K(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Proposition 1) Si $K \subset \Omega$ compact et $k \in \mathbb{N}$, alors $C^k_K(\Omega)$, muni de la norme p^k_K, est un espace de Banach.

2) Si $K \subset \Omega$ compact, alors $C^\infty_K(\Omega)$, muni de la famille des semi-normes $(p^k_K)_k$, est un espace de Fréchet.

Démonstration 1) $C^k_K(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $C^k(\Omega)$, donc il suffit de vérifier que p^k_K induit la même topologie que la famille des semi-normes $(p^k_j)_j$.

Mais d'un côté, il est clair que $p^k_j(u) \geq p^k_K(u)$ si j est tel que $K \subset K_j$.

D'un autre côté, $p^k_j(u) \leq p^k_K(u)$ pour tout j, si $\operatorname{supp} u \subset K$.

2) La preuve est similaire, et laissée comme exercice.

Exercice Démontrer la partie 2).

<u>Remarque</u> Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et si on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$\tilde{u}(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$ et $\tilde{u}(x) = 0$ si $x \notin \Omega$,

alors $\tilde{u} \in C^k(\mathbb{R}^d)$. En prolongeant par zéro une fonction de $C^k_K(\Omega)$, on obtient une fonction de $C^k_K(\mathbb{R}^d)$.

<u>Définition</u> Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note

$$C^k_0(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\, \text{supp } u \text{ est un compact de } \mathbb{R}^d \text{ inclus dans } \Omega\}.$$

On a donc
$$C^k_0(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset \Omega}} C^k_K(\Omega).$$

Si $k = \infty$, on note aussi $C^\infty_0(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$. $\boxtimes$

On voit immédiatement que $C^k_0(\Omega)$ est un espace vectoriel.

<u>Remarque</u> Dans la littérature, on considère souvent $C^k_0(\Omega)$ muni de la "topologie inductive", mais nous n'allons pas le faire ici.

<u>Exemple</u> Trouver une fonction $u \in C^1_0(\mathbb{R})$ qui est quadratique par morceaux.