3. Approximation par convolution

Il n'est pas évident si l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ contient des fonctions autres que la fonction identiquement nulle. Pour examiner cette question, on commence par le lemme suivant.

Lemme 1 Il existe une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \rho = \overline{B(0,1)}$,

$\rho(x) > 0$ pour tout x tq $|x| < 1$, et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$.

Démonstration Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $\tilde{\rho}(x) := f(1 - |x|^2)$.

On a $\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} \tilde{\rho} = \overline{B(0,1)}$ et $\tilde{\rho}(x) > 0$ pour tout x tq $|x| < 1$.

Enfin, posons $\rho(x) := \dfrac{\tilde{\rho}(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}(y)\,dy}$.

$\square$

Si $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\, f(y)\, dy \qquad (*)$$

Observons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto \varphi(x-y)$ est une fonction continue à support compact, donc l'intégrale $(*)$ converge.

Lemme 2. 1) Si $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C(\mathbb{R}^d)$.

2) Si $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial_{x_i}(\varphi * f) = (\partial_{x_i}\varphi) * f, \qquad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

3) Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\varphi \in C^k_0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ |\alpha| \leq k.$$

Démonstration

1) Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < \delta < 1$ et $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ tq $|\tilde{x} - x| < \delta$.

Soit $R \in \mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R)$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_0 > 0$ tq $\delta \leq \delta_0$ implique

$$\operatorname{supp} \varphi(\tilde{x} - \cdot) \subset B(0, R + |x| + 1), \text{ et}$$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)| \leq \varepsilon \qquad \text{donc}$$

$$|(\varphi * f)(\tilde{x}) - (\varphi * f)(x)| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)\big) f(y)\, dy \right|$$

$$= \left| \int_{B(0, R+|x|+1)} \big(\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)\big) f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \int_{B(0, R+|x|+1)} |\varphi(\tilde{x} - y) - \varphi(x - y)|\, |f(y)|\, dy$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0, R+|x|+1)} |f(y)|\, dy,$$

ce qui prouve la continuité de $\varphi * f$.

2) Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. D'après 1), $(\partial_{x_i}\varphi) * f$ est une fonction continue.

Montrons que $\partial_{x_i}(\varphi * f)(x)$ existe et est égale à $((\partial_{x_i}\varphi) * f)(x)$.

Soit $e_i := (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ème position}}}{1}, 0, \dots)$. Il faut vérifier que

$$\left| (\varphi * f)(x + te_i) - (\varphi * f)(x) - t((\partial_{x_i}\varphi) * f)(x) \right| = o(t)$$

quand $t \to 0$.

Pour cela, on exploite la continuité uniforme de $\partial_{x_i}\varphi$, de manière suivante : montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ tq $\delta \leq \delta_0$ et $|t| \leq \delta_0$ impliquent

$$|\varphi(x + te_i) - \varphi(x) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| \leq \varepsilon |t|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

En considérant séparément les parties réelle et imaginaire, on peut supposer que φ est à valeurs réelles.

Soit $\delta_0 > 0$ tq

$$|\tilde{x} - x| \leq \delta_0 \Rightarrow |\partial_{x_i}\varphi(\tilde{x}) - \partial_{x_i}\varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

L'existence de δ_0 résulte de l'uniforme continuité de $\partial_{x_i}\varphi$.

Par le théorème des accroissements finis,

$\exists\, \tilde{t}$ tq $|\tilde{t}| \leq |t|$ et

$$\varphi(x + te_i) - \varphi(x) = t\,\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i), \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x + te_i) - \varphi(x) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| = \\
&= |t\,\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i) - t\,\partial_{x_i}\varphi(x)| \\
&\leq |t|\,|\partial_{x_i}\varphi(x + \tilde{t}e_i) - \partial_{x_i}\varphi(x)| \leq \varepsilon |t|.
\end{aligned}$$

On conclut maintenant comme dans la partie 1) :

$$\left|(\varphi * f)(x+te_j) - (\varphi * f)(x) - t\left((\partial_{x_j}\varphi) * f\right)(x)\right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(x+te_j-y) - \varphi(x-y) - t\partial_{x_j}\varphi(x-y)\right) f(y)\, dy \right|$$

$$= \left| \int_{B(0,R+|x|+1)} \left(\varphi(x+te_j-y) - \varphi(x-y) - t\partial_{x_j}\varphi(x-y)\right) f(y)\, dy \right| = o(t)$$

3) Récurrence par rapport à k.

<u>Remarque</u> On dit qu'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est à support compact s'il existe $K \subset \Omega$ compact tq $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega \setminus K$. On voit que, si f est à support compact, alors $\varphi * f$ également.

<u>Notation</u> Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les conditions du Lemme 1. Si $\varepsilon > 0$, on pose $\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Alors $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

<u>Proposition 1.</u> Si u est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, à support compact, alors $\rho_\varepsilon * u \to u$ uniformément, quand $\varepsilon \to 0$.

<u>Démonstration</u>

Soit $\delta > 0$. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\left|(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)\right| \leq \delta$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

La fonction u est continue à support compact, donc elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$|x-y| \leq \varepsilon_0 \implies |u(x)-u(y)| \leq \delta.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. On trouve :

$$\left|(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy - u(x)\right|$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,u(x)\,dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,|u(y)-u(x)|\,dy \leq$$

$$\leq \sup_{|y-x|\leq\varepsilon} |u(y)-u(x)| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy \leq \delta.$$

<u>Corollaire 1.</u> Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) \longrightarrow \partial^\alpha u$ uniformément lorsque $\varepsilon \to 0$.

<u>Preuve</u> Par le Lemme 2, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = \rho_\varepsilon * (\partial^\alpha u)$, donc il suffit d'utiliser la Proposition 1, avec $\partial^\alpha u$ au lieu de u.

Théorème 1. 1) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \rho_\varepsilon * u - u \|_{L^p} = 0.$$

2) L'ensemble $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration

Étape 1. On montre que, $\forall v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$,

$$\| \rho_\varepsilon * v \|_{L^p} \leq \| v \|_{L^p}.$$

En effet,

$$\| \rho_\varepsilon * v \|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy \right|^p dx.$$

Par l'inégalité de Hölder, pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy \right|^p = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)^{1/p'} \rho_\varepsilon(x-y)^{1/p} v(y)\, dy \right|^p$$

$$\leq \underbrace{\| \rho_\varepsilon(x-\cdot)^{1/p'} \|_{L^{p'}}^p}_{=1} \| \rho_\varepsilon(x-\cdot)^{1/p} v \|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\| \rho_\varepsilon * v \|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(|v(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\, dx}_{=1} \Big) dy = \| v \|_{L^p}^p.$$

Remarque 1) L'inégalité $\left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy \right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy$

peut être aussi obtenue facilement

de l'inégalité de Jensen. (Exercice).

2) L'inégalité $\|\rho * v\|_{L^p} \leqslant \|\rho\|_{L^1} \|v\|_{L^p}$ est un cas particulier de l'inégalité de Young et un cas particulier de l'inégalité de Minkowski.

<u>Exercice</u> Expliquer la dernière Remarque.

<u>Étape 2.</u> Soit $\delta > 0$. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ implique

$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \leq \delta.$$

D'après le cours sur la théorie de la mesure, on sait qu'il existe v, une fonction continue à support compact, telle que $\|u - v\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{3}\delta$.

La Proposition implique qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \Rightarrow \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} \leq \frac{1}{3}\delta.$$

En utilisant l'étape 1, on obtient

$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \leqslant \|\rho_\varepsilon * u - \rho_\varepsilon * v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} + \|v - u\|_{L^p}$$

$$= \|\rho_\varepsilon * (u-v)\|_{L^p} + \|u - v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p}$$

$$\leqslant 2\|u - v\|_{L^p} + \|\rho_\varepsilon * v - v\|_{L^p} \leqslant \delta.$$

<u>Etape 3.</u> Dans l'étape 2, on a vu que

$$\|\rho_\varepsilon * v - u\|_{L^p} \leqslant \frac{2}{3}\delta.$$

Mais $\rho_\varepsilon * v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et δ est arbitraire >0, donc $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

$\square$

À présent, on formulera et démontrera des résultats analogues dans le cas d'un domaine général $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Théorème 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. Il existe une fonction $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\eta(x) = 1$ pour tout $x \in K$ et $0 \leq \eta(x) \leq 1$ $\forall x \in \Omega$.

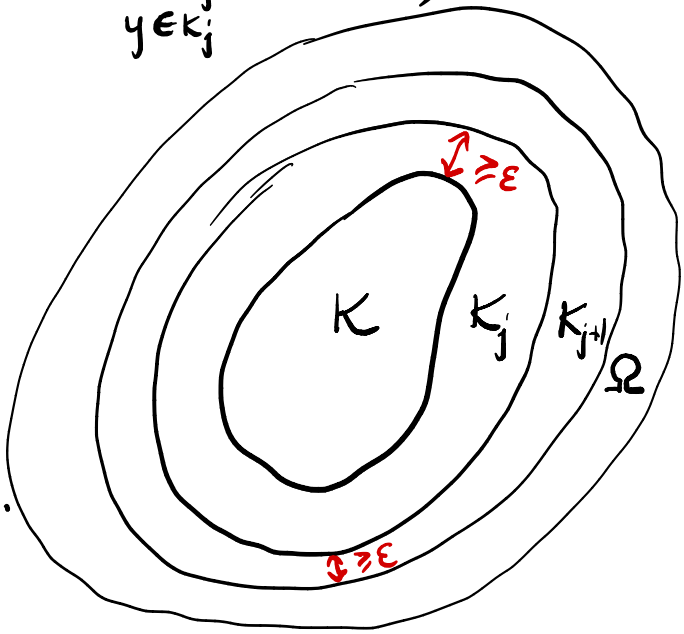
Démonstration

Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Soit j tel que $K \subset \mathring{K}_j$, et posons

$$\varepsilon := \min\left(\inf_{\substack{x \in K \\ y \notin K_j}} |x-y| , \inf_{\substack{x \notin K_{j+1} \\ y \in K_j}} |x-y| \right)$$

$$\eta(x) := (\rho_\varepsilon * \mathbb{1}_{K_j})(x),$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.



On sait déjà que $\eta \in C^\infty(\Omega)$.

On va montrer que $\operatorname{supp} \eta \subset K_{j+1}$.

En effet, soit $x \in \Omega \setminus K_{j+1}$. On a

$$\eta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) \mathbb{1}_{K_j}(y) dy = \int_{K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy \qquad (*)$$

Mais $|x-y| \geq \varepsilon$ pour tout $y \in K_j$, donc $\rho_\varepsilon(x-y) = 0$, donc $\eta(x) = 0$.

Par la définition de $C_0^\infty(\Omega)$, on conclut que $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

La fonction ρ_ε est positive, d'intégrale 1, donc $(*)$ implique aussi $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\forall x \in \Omega$.

Enfin, si $x \in K$, alors

$$\eta(x) = \int_{K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

$$= 1 - \int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Par le même argument que tout à l'heure,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus K_j} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0, \quad \text{donc} \quad \eta(x) = 1.$$

<u>Corollaire 2.</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω.
Il existe une suite de fonctions $(\eta_j)_j$ telles que $\eta_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta_j(x) = 1$ pour tout $x \in K_j$, $\operatorname{supp} \eta_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $0 \leq \eta_j(x) \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$.

<u>Démonstration</u> On applique le théorème précédent avec $\mathring{K}_{j+1}$ à la place de Ω, et K_j à la place de K.

Théorème 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$,
2) Pour tout $p \in [1, \infty[$, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^p_{loc}(\Omega)$.

Démonstration 1) Soit $u \in C^k(\Omega)$ et $(\eta_j)_j$ la suite trouvée dans le Corollaire 2.

Il est clair que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$
$\eta_j u \in C_0^k(\Omega)$ et $\lim_{j\to\infty} \eta_j u = u$ dans $C^k(\Omega)$.

Mais, pour $j \in \mathbb{N}^*$ donné, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \in C_0^\infty(\Omega)$, cf. la preuve du Théorème 2.

Par le Corollaire 1, $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \to \eta_j u$ uniformément avec toutes les dérivées d'ordre $\leq k$, en particulier dans $C^k(\Omega)$, donc $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, donc $u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ également.

2) Si $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, alors $\lim_{j\to\infty} \eta_j u = u$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$,

donc il suffit de montrer que $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

Mais, pour $j \in \mathbb{N}^*$ donné, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Par le Théorème 1, $\rho_\varepsilon * (\eta_j u) \to \eta_j u$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, donc aussi dans $L^p_{loc}(\Omega)$, donc $\eta_j u \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.

Exercice Traiter le cas de l'espace $L^p(\Omega)$.

Remarque La famille (ρ_ε), lorsque $\varepsilon \to 0$, est un exemple d'une <u>approximation de l'identité</u>.