Chapitre III. Distributions

1. Définition des distributions

Définition 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert.
Une *distribution* T sur Ω est une forme linéaire
$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$
$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$
telle que pour tout $K \subset \Omega$ compact
$T|_{C_K^\infty(\Omega)} : C_K^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des distributions sur Ω est un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$).

Notation On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Proposition 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) T est une distribution sur Ω

ii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et pour toute suite $(\varphi_n)_n$ de $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant

a) il existe $K \subset \Omega$ compact de Ω avec $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pour tout n

b) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \varphi_n \to 0$ uniformément

on a $\lim\limits_{n \to \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$.

iii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et $\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ on a
$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Démonstration i) $\Leftrightarrow$ ii) résulte de la définition de la convergeance dans $C_K^\infty(\Omega)$.

i) $\Leftrightarrow$ iii) On utilise la Proposition 2. du Chapitre I, page 4.

Remarque Dans iii), k et C dépendent de K ! $\square$

Définition 2. (distributions d'ordre $\leq k$)

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à $k \in \mathbb{N}$ si T s'étend en une forme linéaire $\tilde{T} : C_0^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ tq $\forall K \subset \Omega$ compact, $\tilde{T}\big|_{C_K^k(\Omega)} : C_K^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue.

Exercice 1. 1) Montrer que l'ensemble des distributions d'ordre $\leq k$ est un espace vectoriel.

2) Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre $\leq k$ si, et seulement si, $\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C > 0$ tel que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Comparer avec la proposition ci-dessus.

Notation 1) On note $\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω d'ordre $\leq k$.

2) On note $\mathcal{D}'^F(\Omega) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$

l'espace des distributions d'ordre fini.

Definition 3. On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre (exactement) $k \in \mathbb{N}^*$ si $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega) \setminus \mathcal{D}'^{(k-1)}(\Omega)$.

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre (exactement) 0 si $T \in \mathcal{D}'^{(0)}(\Omega)$.

2. Exemples de distributions

1) Fonctions localement intégrables.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on pose

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

Si $K \subset \Omega$ compact et $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_K f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \|\mathbb{1}_K f\|_{L^1} \times \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

donc T_f est une distribution d'ordre zéro sur Ω.

Considérons l'application $\Phi : L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ donnée par $\Phi(f) := T_f$.

Alors Φ est une application linéaire injective.

En effet, soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tq $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Considérons η_j, cf. la démonstration du Théorème 3.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixe, on a

$$(\rho_\varepsilon * (\eta_j f))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,\eta_j(y) f(y)\,dy.$$

Comme $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)\,\eta_j(y)$ est un élément de $C_0^\infty(\Omega)$, on a $\rho_\varepsilon * (\eta_j f) = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Par le Théorème 1, $\rho_\varepsilon * (\eta_j f) \to \eta_j f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ quand $\varepsilon \to 0$, donc $\eta_j f = 0$ presque partout. En particulier, $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in K_j$. Comme $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.

La linéarité de Φ est claire.

On voit que T_f est une distribution d'ordre 0. En effet, si $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_K f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \left(\int_K |f(x)|dx \right) \left(\sup_{x \in K} |\varphi(x)| \right),$$

et on applique le résultat de l'Exercice 1.

2) <u>Masses de Dirac</u>

Soit $x_0 \in \Omega$. On définit δ_{x_0} par

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle := \varphi(x_0), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors δ_{x_0} est une distribution d'ordre 0 sur Ω, appelée la masse de Dirac en x_0.

<u>Exercice</u> Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

3) <u>Mesures</u> Si μ est une mesure borélienne positive sur Ω telle que $\mu(K)<\infty$ pour tout compact $K\subset\Omega$, alors on peut lui associer la distribution T_μ définie par

$$\langle T_\mu, \varphi\rangle := \int_\Omega \varphi(x)\,\mu(dx), \quad \forall \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Par le même argument que dans 1), on voit que T_μ est d'ordre 0.

S'il existe une fonction $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\mu(A)=\int_A f(x)\,dx, \quad \forall A\subset\Omega \text{ borélien}, \quad \text{alors}$$

on dit que f est la <u>densité</u> de la mesure μ.

On voit que, si μ a la densité f, alors $T_\mu = T_f$, où T_f est définie dans le 1er exemple.

On remarque que, si $\mu=\delta_{x_0}$ est la mesure "masse de Dirac", alors $T_\mu = T_{\delta_{x_0}} = \delta_{x_0}$, où la distribution δ_{x_0} a été définie dans le 2ème exemple.

<u>Exercice</u> Examiner le cas des mesures complexes.

4) Dérivées de la masse de Dirac

Soit $\alpha := (\alpha_1 \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $x_0 \in \Omega$.

On note $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ ou $\delta_{x_0}^{(\alpha)}$ la distribution définie par

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

Proposition 2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ est une distribution d'ordre $|\alpha|$.

Démonstration Il est clair que $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ est une distribution d'ordre $\leq |\alpha|$.

Supposons qu'elle est d'ordre $< |\alpha|$.

Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\partial^\alpha \theta(0) \neq 0$.

Une telle fonction existe, on peut prendre par exemple $\theta(x) := x^\alpha \chi(x)$, où χ est une fonction cut-off.

Soit $K \subset \Omega$ un compact tel que $x_0 \in \mathring{K}$.

Puisqu'on suppose que $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ est d'ordre $\leq |\alpha| - 1$, il existe C tq

$$|\partial^\alpha \varphi(x_0)| \leq C \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \sup_{x \in K} |\varphi^{(\beta)}(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

Considérons en particulier $\varphi(x) := \theta(\lambda(x - x_0))$, λ grand.

On obtient $\lambda^{|\alpha|} |\partial^\alpha \theta(0)| \leq C \lambda^{|\alpha|-1}$,

ce qui n'est pas vrai si λ est assez grand.

La contradiction termine la preuve. $\square$

5) Exemple d'une distribution d'ordre infini

Soit T définie par

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Exercice Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Montrer que T n'est pas une distribution d'ordre fini.

6) Valeur principale de $1/x$.

Soit $vp\,1/x : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\langle vp\,\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x)\, dx.$$

Alors $vp\,\frac{1}{x}$ est une distribution d'ordre exactement 1.

Rappelons le résultat suivant de la théorie de la mesure.

<u>Définition 4.</u> Soit Ω un espace de Hausdorff localement compact. On dit qu'une forme linéaire $l : C_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est <u>positive ou nulle</u> si $l(f) \geq 0$ pour toute fonction

$$f \in C_0(\Omega) \quad \text{telle que} \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

<u>Théorème</u> (thm. de représentation de Riesz ou Riesz–Markov–Kakutani).

Soit Ω un espace de Hausdorff localement compact et $l : C_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire positive.

Alors il existe une mesure borélienne μ sur Ω tq

$$l(f) = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx), \qquad \forall f \in C_0(\Omega).$$

$\boxtimes$

<u>Définition 5.</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est <u>positive ou nulle</u> si

$$\langle T, \varphi \rangle \geq 0 \quad \text{pour toute fonction } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

<u>Proposition 3.</u> Toute distribution positive ou nulle est d'ordre 0.

<u>Démonstration</u> Il suffit de montrer que, si T est une distribution positive ou nulle et $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $C_K \geq 0$ tq

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

Soit $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tq $0 \leq \eta(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$ et $\eta(x) = 1 \quad \forall x \in K$ (une telle fonction η existe, voir Théorème 2. du chapitre précédent), et soit $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$. On observe que, $\forall x \in \Omega$,

$$-\left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\eta(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\eta(x),$$

donc la positivité de T implique que

$$-\left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\langle T,\eta\rangle \leqslant \langle T,\varphi\rangle \leqslant \left(\sup_{y\in K}|\varphi(y)|\right)\langle T,\eta\rangle,$$

d'où on déduit qu'il suffit prendre $C_K := \langle T,\eta\rangle$.

<u>Corollaire</u> Si T une distribution positive ou nulle sur Ω, alors il existe une mesure borélienne positive sur Ω telle que

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)\,\mu(dx), \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

$\boxtimes$

Chapitre IV : Opérations sur les distributions

1. Produit d'une distribution et d'une fonction C^∞

Théorème et Définition Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$.

On définit aT par

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

Si $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $C \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tq

$$|\langle T, \psi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|, \quad \forall \psi \in C_K^\infty(\Omega).$$

Si $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors $a\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ aussi, donc

$$|\langle T, a\varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (a\varphi)(x)|$$

$$\leqslant C' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

où la dernière inégalité est une conséquence de la formule de Leibniz. On a donc

$$aT : C_K^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} \quad \text{continue, cqfd}$$

$\square$

Exercice Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a, b \in C^\infty(\Omega)$. Montrer que :

1) $(a+b)T = aT + bT$
2) $a(T+S) = aT + aS$
3) $a(bT) = (ab)T$.

Exemples

- $a\,\delta_{x_0} = a(x_0)\,\delta_{x_0}$
- $x \operatorname{vp}\frac{1}{x} = 1$.

Exercice Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $xT=0$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $T = \lambda \delta_0$.

2. Dérivation des distributions

Définition et théorème Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit une forme linéaire $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ sur $C_0^\infty(\Omega)$ en posant

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle := - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration Si $K \subset \Omega$ compact, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$, $\forall \psi \in C_K^\infty(\Omega)$,

donc $\left| \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \partial_{x_j} \varphi(x)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k+1} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$,

donc $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Propriétés i) Si $T = T_f$ avec f de classe C^1, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}.$$

ii) $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'^{(k+1)}(\Omega)$

iii) si $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(aT) = \frac{\partial a}{\partial x_j} T + a \frac{\partial T}{\partial x_j}$.

Preuve. Exercice

Remarque (dérivées d'ordre supérieur)

Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$.

3. Exemples de dérivées au sens des distributions

Exemple 1. Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $v(x) := \int_0^x u(t)\,dt$.

Alors v est une fonction continue et la dérivée de T_v au sens des distributions est T_u.

Preuve. On écrit u au lieu de T_u et v au lieu de T_v.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\langle v', \varphi\rangle = -\langle v, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x u(y)\,dy\right)\varphi'(x)\,dx.$$

On peut utiliser Fubini :

$$\langle v', \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(y)\,\varphi'(x)\,\mathbb{1}_{0<y<x}\,dx\right)dy$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(y)\,\varphi'(x)\,\mathbb{1}_{x<y<0}\,dx\right)dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_y^{+\infty} \varphi'(x)\,dx\right)\mathbb{1}_{y>0}\,u(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{y} \varphi'(x)\,dx\right)\mathbb{1}_{y<0}\,u(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathbb{1}_{y>0}\,u(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathbb{1}_{y<0}\,u(y)\,dy = \langle u, \varphi\rangle.$$

Exemple 2. Soit $H(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$. Alors $H' = \delta_0$.

Exemple 3. Au sens des distributions, $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

<u>Proposition</u> Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $T \in \mathcal{D}'(I)$.

Alors $T = \text{const} \iff T' = 0$.

<u>Démonstration</u> $\Rightarrow$ évident.

$\Leftarrow$ Si $T' = 0$, alors $\langle T, \theta' \rangle = 0$, $\forall \theta \in C_0^\infty(I)$.

Fixons $\rho \in C_0^\infty(I)$ avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$.

Si $\varphi \in C_0^\infty(I)$, soit

$$\psi(x) := \varphi(x) - \rho(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \in C_0^\infty(I).$$

Soit $\theta(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$.

Alors $\theta' = \psi$ et $\theta \in C_0^\infty(I)$.

En effet, si $a < b$ sont tels que

$\operatorname{supp} \varphi \cup \operatorname{supp} \rho \subset [a, b] \subset I$, alors

$\operatorname{supp} \theta \subset [a, b]$, puisque, si $x \geq b$,

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \right) dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(z) - \rho(z) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \right) dz = 0.$$

Par conséquent, $\langle T, \theta' \rangle = \langle T, \psi \rangle = 0$ donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \rho \rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy = C \langle 1, \varphi \rangle,$$

où $C := \langle T, \rho \rangle$, donc $T = C = \text{const}$.

4. Translations, changement d'échelle, changement de variables.

Notation : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$.

On pose $(\tau_a \varphi)(x) := \varphi(x-a)$.

__Définition__ Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$.

On définit $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

$\boxtimes$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et, pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, soit $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_\lambda(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,|\lambda|^{-d}\varphi(y/\lambda)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,|\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda}(y)dy.$$

On utilise donc cette formule pour définir T_λ lorsque $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

__Définition__ Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

On définit $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T_\lambda, \varphi \rangle := \langle T, |\lambda|^{-d}\varphi_{1/\lambda} \rangle.$$

$\boxtimes$

Soient $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ deux ouverts, $\kappa : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme C^∞. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $f \circ \kappa^{-1} : \Omega' \to \mathbb{C}$. Alors $f \circ \kappa^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega')$.

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, on a

$$\int_{\Omega'} (f \circ \kappa^{-1})(x') \varphi(x') \, dx' = \int_{\Omega} f(x) \varphi(\kappa(x)) \, |\det J_\kappa(x)| \, dx,$$

où $J_\kappa(x)$ est la matrice jacobienne de κ.

On a donc $\langle T_{f \circ \kappa^{-1}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \circ \kappa \, |\det J_\kappa| \rangle$,

et $x \mapsto \varphi \circ \kappa(x) \, |\det J_\kappa(x)|$ est une fonction C^∞ car $J_\kappa(x)$ ne s'annule pas.

Cela permet de définir la composition d'une distribution et d'un difféomorphisme C^∞.

<u>Notation</u> : Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, on pose $\kappa^* \varphi := \varphi \circ \kappa \in C_0^\infty(\Omega)$, donc $\kappa^* : C_0^\infty(\Omega') \to C_0^\infty(\Omega)$ lorsque $\kappa : \Omega \to \Omega'$.

<u>Définition et proposition</u> Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\kappa : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme C^∞. On définit $\kappa_* T \in \mathcal{D}'(\Omega')$ par

$$\langle \kappa_* T, \varphi \rangle := \langle T, (\kappa^* \varphi) \, |\det J_\kappa| \rangle.$$

<u>Démonstration</u> Soit $K' \subset \Omega'$ compact.

On doit montrer qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ et $C' \geq 0$ tq

$$|\langle \kappa_* T, \varphi \rangle| \leq C' \sum_{|\alpha| \leq k'} \sup_{x' \in K'} |\partial^\alpha \varphi(x')|.$$

Soit $K := \kappa^{-1}(K') \subset \Omega$ compact. Alors $\kappa^* \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$.

Si on pose $\psi = \kappa^* \varphi \, |\det J_\kappa|$, on a donc

$$\langle \kappa_* T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle.$$

Comme $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Il suffit donc de voir que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha [\varphi \circ \kappa(x) |\det J_\kappa(x)|]|$$
$$\leq C'' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x' \in \Omega'} |\partial^\alpha \varphi(x')|.$$

Or on vérifie par récurrence que $\partial^\alpha [\varphi \circ \kappa(x)]$ est combinaison linéaire d'expressions

$$(\partial^\beta \varphi)(\kappa(x)) \; P_{\alpha,\beta}\left((\partial^\gamma \kappa)_{1 \leq |\gamma| \leq |\alpha|}\right) \text{ avec } |\beta| \leq |\alpha|$$

et $P_{\alpha,\beta}$ polynôme.

<u>Exemple</u> Soit $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphisme.

Calculons $\kappa_* \delta_0$. On a

$$\langle \kappa_* \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, (\varphi \circ \kappa) |\kappa'| \rangle$$
$$= \varphi \circ \kappa(0) \, |\kappa'(0)| = |\kappa'(0)| \langle \delta_{\kappa(0)}, \varphi \rangle,$$

donc $\kappa_* \delta_0 = |\kappa'(0)| \, \delta_{\kappa(0)}$.

<u>Remarque</u> Les translations et les changements d'échelle sont des cas particuliers de changements de variables.

5. Limite d'une suite de distributions

Définition Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

On écrit souvent $T_n \rightharpoonup T$.

Propriétés i) Si $T_n \rightharpoonup T$, alors $\partial^\alpha T_n \rightharpoonup \partial^\alpha T$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

ii) Si $(f_n)_n$ une suite dans $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, et $f_n \to f$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$, alors $T_{f_n} \rightharpoonup T_f$.

$\boxtimes$

Définition Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite $S_n := \sum_{n'=0}^{n} T_{n'}$ converge.

Remarque Si $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge, alors

$$\partial^\alpha \Big(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^\alpha T_n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Exemples

i) Soit $\chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\int \chi(x)\, dx = 1$, et $\chi_n(x) := n^d \chi(nx)$. Alors $\chi_n \rightharpoonup \delta_0$.

ii) Soit $\chi_n(x) := \exp(2\pi i n x)$, $\chi_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $\chi_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

iii) $\dfrac{\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}}{x} \longrightarrow \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$.

Remarque Dans le dernier exemple il n'y a pas de suite ; il faut comprendre que $\lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle \dfrac{\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}}{x}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}, \varphi \right\rangle$ $\forall \varphi$.

Théorème Soit $(T_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, il existe $l_\varphi \in \mathbb{C}$ avec $\langle T_n, \varphi \rangle \to l_\varphi$. Il existe alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \to T$.

Démonstration

Il est évident que $\langle T, \varphi \rangle := l_\varphi$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$.
Il suffit de montrer que $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$ est continue pour tout $K \subset \Omega$ compact.

Rappelons que $C_K^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet. Les formes linéaires $(T_n|_{C_K^\infty(\Omega)})_n$ vérifient les conditions du Théorème 1, page 7, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega).$$

En passant à la limite, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega),$$

autrement dit la continuité de $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$.

$\square$

Exercice Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_{he_j} T - T}{h} = \partial_{x_j} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

$\boxtimes$