Partitions de l'unité

Théorème 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $(\omega_j)_j$ une famille d'ouverts telles que

i) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j$

ii) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\omega_j} \subset \Omega$ compact,

iii) $\forall x \in \Omega$, $\exists V$ ouvert tq $x \in V$ et l'ensemble $\{ j \in \mathbb{N}^* : V \cap \omega_j \neq \emptyset \}$ est fini.

Alors il existe des fonctions $\chi_j \in C_0^{\infty}(\omega_j)$, telles que $0 \leq \chi_j(x) \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$.

Démonstration

Étape 1. On montre qu'il existe une famille $(\omega_j')_j$ d'ouverts tels que

•) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$,

•) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j'$.

On construit $\omega_1', \omega_2', \dots$ un par un, de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

* $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$ pour $j = 1, \dots, m-1$

* $\left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \omega_j' \right) \cup \left(\bigcup_{j=m}^{\infty} \omega_j \right) = \Omega$.

Pour $m = 1$, cela est vrai.

Supposons, que $\omega_1', \dots, \omega_{m-1}'$ sont construits.

Soit $\Omega_m := \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \omega_j' \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} \omega_j \right)$.

C'est un ensemble ouvert et $\Omega_m \cup \omega_m = \Omega$.
Soit $F_m := \Omega \setminus \Omega_m$. C'est un ensemble fermé dans Ω et vérifiant $F_m \subset \omega_m$.
Par hypothèse, $\overline{\omega_m}$ est un compact, donc F_m aussi.
Il existe alors ω_m' ouvert tel que

$$F_m \subset \omega_m' \subset \overline{\omega_m'} \subset \omega_m .$$

On a $\Omega = F_m \cup \Omega_m \subset \omega_m' \cup \Omega_m$, ce qui prouve l'hérédité.

Il reste à vérifier que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j'$.

Or, si $x \in \Omega$, il existe, d'après l'hypothèse iii), N tel que $x \notin \omega_j$ si $j > N$, donc $x \notin \bigcup_{j=N+1}^{\infty} \omega_j$.
Puisque $\Omega = \left(\bigcup_{j=1}^{N} \omega_j' \right) \cup \left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} \omega_j \right)$, $x \in \bigcup_{j=1}^{N} \omega_j'$.

<u>Étape 2.</u> Par le Corollaire 2, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction $\theta_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\theta_j = 1$ sur $\overline{\omega_j'}$.

Posons $\theta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x)$.

Pour tout $x \in \Omega$, c'est une somme finie sur un voisinage de x, donc de classe C^∞ sur ce voisinage.
Aussi, $\theta(x) \geq 1$ pour tout $x \in \Omega$.
On définit $\chi_j := \theta_j / \theta$.

On termine ce chapitre par un autre résultat du même type.

Théorème 5. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $(\omega_j)_{j=1\dots m}$ un recouvrement ouvert fini de K par des ouvert bornés. Alors il existe $\chi_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^m \chi_j(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\sum_{j=1}^m \chi_j = 1$ sur K.

Étape 1. On montre qu'il existe une famille $(\omega_j')_{j=1}^m$ d'ouverts tels que

•) $\overline{\omega_j'} \subset \omega_j$, $\forall j = 1, \dots, m$

•) $K \subset \bigcup_{j=1}^m \omega_j$.

Exercice Faire la Étape 1.

Étape 2. Soit $\theta_j \in C_0^\infty(\omega_j)$, $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\theta_j = 1$ sur ω_j', $\theta := \sum_{j=1}^m \theta_j$,

donc $\theta(x) \geq 1$ sur $\bigcup_{j=1}^m \omega_j'$.

Soit $\chi \in C_0^\infty\left(\bigcup_{j=1}^m \omega_j\right)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ sur K.

On pose
$$\chi_j(x) := \begin{cases} \dfrac{\chi(x)\theta_j(x)}{\theta(x)} & \text{si } x \in \bigcup_{j=1}^m \omega_j \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{j=1}^m \omega_j . \end{cases}$$

$\square$

3. Support des distributions

Définition 6. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et ω un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la restriction de T à ω, $T|_\omega$, est définie comme la forme linéaire sur $C_0^\infty(\omega)$ donnée par

$$\langle T|_\omega, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

Comme $C_0^\infty(\omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$, la définition a un sens.
Si $K \subset \omega$ un compact, alors

$$\langle T|_\omega, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_K^\infty(\omega) = C_K^\infty(\Omega),$$

donc la continuité de $T|_\omega$ sur $C_K^\infty(\omega)$ résulte directement de la continuité de T sur $C_K^\infty(\Omega)$, autrement dit $T|_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$.

On voit que, si $\omega' \subset \omega \subset \Omega$, alors $(T|_\omega)|_{\omega'} = T|_{\omega'}$.

Proposition (Propriété de faisceau). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $(\omega_j)_j$ une famille localement finie d'ouverts telle que $\bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j = \Omega$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$T_j \in \mathcal{D}'(\omega_j)$ et supposons que, $\forall\, i,j \in \mathbb{N}^*$ tq $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$, $T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}$. Alors, il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T|_{\omega_j} = T_j$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration (incorrecte! celle faite en cours est la bonne)

Existence : Soit $(\chi_j)_j$ une partition de l'unité subordonnée à la famille $(\omega_j)_j$, dont l'existence est garantie par le Théorème 5 ci-dessus.

Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors $\chi_j \varphi \in C_0^\infty(\omega_j)$ et $\langle T_j, \chi_j \varphi \rangle$ a un sens. On pose

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_j, \chi_j \varphi \rangle. \qquad (*)$$

Comme $\operatorname{supp} \varphi$ est un ensemble compact, l'ensemble $\{ j : \omega_j \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset \}$ est fini, donc la somme dans $(*)$ est finie.

Exercice Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. $\boxtimes$

Montrons que $T_{|\omega_j} = T_j$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.
On doit vérifier que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_j, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega_j).$$

Or,
$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T_i, \chi_i \varphi \rangle$$

Comme $\chi_i \varphi \in C_0^\infty(\omega_i \cap \omega_j)$ et que $T_{i|\omega_i \cap \omega_j} = T_{j|\omega_i \cap \omega_j}$, on a $\langle T_i, \chi_i \varphi \rangle = \langle T_j, \chi_i \varphi \rangle$, d'où

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T_j, \chi_i \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T_j, \chi_i \varphi \rangle =$$
$$= \langle T_j, \sum_{i=1}^{I_0} \chi_i \varphi \rangle = \langle T_j, \varphi \rangle$$

Unicité : Il suffit de voir que $T_{|\omega_i} = 0$ pour tout i implique $T = 0$. Mais, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alors il existe I_0 tq $\varphi = \sum_{i=1}^{I_0} \chi_i \varphi$, donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T, \chi_i \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{I_0} \langle T_{|\omega_i}, \chi_i \varphi \rangle = 0.$$

<u>Définition</u> On appelle le <u>support</u> de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ le complémentaire de la réunion de tous les ouverts $\omega \subset \Omega$ tels que $T_{|\omega} = 0$.
On le note $\operatorname{supp}(T)$.

<u>Proposition</u> Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

i) $x_0 \notin \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \exists V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$ et $T_{|V} = 0$.

ii) $x_0 \in \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \forall V \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in V$,
$$\exists \varphi \in C_0^\infty(V) \text{ tq } \langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

iii) Si $F \subset \Omega$ un fermé, alors
$$\operatorname{supp} T \subset F \Leftrightarrow T_{|\Omega \setminus F} = 0.$$

<u>Démonstration</u> i) est une réécriture de la définition.

ii) Par la partie i), on a
$$x_0 \in \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \forall V \subset \Omega \text{ ouvert tq } x_0 \in V,\ T_{|V} \neq 0.$$
Mais $T_{|V} \neq 0$ signifie précisément qu'il existe $\varphi \in C_0^\infty(V)$ tq $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

iii) $\Leftarrow$ Si $T_{|\Omega \setminus F} = 0$, alors, comme $\Omega \setminus F$ est un ouvert, $\Omega \setminus F \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} T$, autrement dit $\operatorname{supp} T \subset F$.

$\Rightarrow$ Soit $\operatorname{supp} T \subset F$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus F)$, donc $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \operatorname{supp} T)$.

Soit $K := \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} T$.

Par la partie i), $\forall x_0 \in K$ il existe $\omega_{x_0} \subset \Omega$ ouvert tq $x_0 \in \omega_{x_0}$ et $T_{|\omega_{x_0}} = 0$.

On en extrait une famille finie qui recouvre K.

Soit ω leur réunion.

On a $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ donc, par la Propriété de faisceau, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

<u>Exemples</u> • Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, et T_f la distribution associée. Alors $\operatorname{supp} T_f$ est le support essentiel de f.

Dém : <u>Exercice</u>

• $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}$.

Dém : Soit $F := \{x_0\}$ dans la Proposition ci-dessus, iii)

Si $\varphi \in C^\infty$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus \{x_0\}$, alors φ est identiquement nulle sur un voisinage ouvert de x_0, en particulier $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0) = 0$.

On a donc $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) \subset \{x_0\}$.

Il suffit maintenant de vérifier que $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) \neq \emptyset$, c'est à dire que $\partial^\alpha \delta_{x_0} \neq 0$, autrement dit qu'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0) \neq 0$.

Il suffit de prendre $\varphi(x) := \chi(x)(x - x_0)^\alpha$, où $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\chi \equiv 1$ près de x_0.

<u>Théorème</u> Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$.

Supposons que $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$ tels que

$$(*) \quad T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

<u>Démonstration</u> Par translation, on se ramène au cas $x_0 = 0$.

Soit $r > 0$ tel que $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$. On sait qu'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, $\forall \theta \in C^\infty$ avec $\operatorname{supp} \theta \subset \overline{B(0,r)}$

$$\binom{*}{*} \quad |\langle T, \theta\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \theta(x)|.$$

Fixons une fonction cut-off $\chi \in C^\infty$, $\operatorname{supp} \chi \subset \overline{B(0,r)}$.

On montrera $(*)$ avec

$$a_\alpha := \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle T, x^\alpha \chi\rangle.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \chi(x)$.

On observe que, pour tout $|\alpha|\leq k$,

$$\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) =$$

$$= \Big\langle T - \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \; \varphi\Big\rangle,$$

donc il suffit de montrer que $\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0$.

Pour cela, on observe que, $\forall |\alpha|\leq k \; \exists C_\alpha$ tq

$|\partial^\alpha \tilde{\varphi}(x)| \leq C_\alpha |x|^{k+1-|\alpha|}$, $\quad \forall |x|\leq r$. (Exercice)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $\varphi_n(x) := \tilde{\varphi}(x)\chi(nx)$.

La formule de Leibniz donne, pour tout $|\beta|\leq k$,

$$|\partial^\beta \varphi_n(x)| \leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial^\gamma \tilde{\varphi}(x)| \, |n^{|\beta|-|\gamma|} \partial^{\beta-\gamma}\chi(nx)|$$

Si $|x| \geq n^{-1} r$, alors la somme vaut 0.

Si $|x| \leq n^{-1} r$, alors elle s'estime par

$$\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} C_\gamma (n^{-1}r)^{k+1-|\gamma|} n^{|\beta|-|\gamma|} \lesssim n^{|\beta|-k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc $\binom{*}{*}$ implique $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = 0$.

Mais $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi} - \varphi_n) \not\ni 0$, donc $\langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \tilde{\varphi}\rangle$,

et on conclut que $\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0$.

$\square$

<u>Exercice</u> 1) Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ et u une fonction de classe C^{k+1} sur un voisinage ouvert du segment reliant x à $x+y$. Démontrer la <u>formule de Taylor</u>:

$$u(x+y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{k+1}{\alpha!} y^\alpha \int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha u(x+ty)\,dt$$

2) Soit u une fonction de classe C^{k+1} sur la boule de centre x_0 et de rayon $r>0$, tq $\partial^\alpha u(0) = 0$, $\forall |\alpha| \leq k$.
Montrer qu'il existe $C>0$ tq $|\varphi(x)| \leq C |x-x_0|^{k+1}$, pour tout x dans cette boule.

$\boxtimes$

4. Distributions à support compact.

Définition On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact si $\operatorname{supp} T \subset \Omega$ est un ensemble compact.

On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.

Théorème Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ si, et seulement si, il existe $\widetilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue telle que $\widetilde{T}_{|C_0^\infty(\Omega)} = T$.

Remarque On sait (Théorème 3, p. 29) que l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^\infty(\Omega)$, donc $\widetilde{T}$, si elle existe, est unique.

Démonstration du théorème

Supposons d'abord qu'il existe $\widetilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$, une extension continue de T. Par la Proposition 2, page 4, il existe $K_j \subset \Omega$ compact, $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Montrons que $\operatorname{supp} T \subset K_j$.

En effet, soit $x_0 \notin K_j$, et $V \subset \Omega$ un ouvert tq $x_0 \in V$ et $V \cap K_j = \emptyset$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset V$, alors $\sup_{x \in K_j} |\partial_x^\alpha \varphi(x)| = 0$ pour tout $|\alpha| \leq k$, donc l'inégalité ci-dessus montre que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Cela montre que $x_0 \notin \operatorname{supp} T$, autrement dit $\operatorname{supp} T \subset K_j$.

Inversement, supposons que $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.
Soit $K_j \subset \Omega$ compact tq $\operatorname{supp} T \subset \mathring{K}_j$.
Par la définition d'une distribution, page 33,
$T|_{C^\infty_{K_j}(\Omega)} : C^\infty_{K_j}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est continue,

autrement dit il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tq

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C^\infty \text{ tq } \operatorname{supp} \varphi \subset K_j.$$

Fixons $\chi \in C^\infty$ tq $\chi(x) = 1$ sur un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} T$ et $\operatorname{supp} \chi \subset K_j$.
Soit $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ et considérons $\varphi := \chi \psi$.
Par la règle de Leibniz, il existe $C_\chi \geq 0$ tq

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha(\chi\psi)| \leq C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi|.$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$|\langle T, \chi\psi \rangle| \leq C C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Comme $\operatorname{supp}((1-\chi)\psi) \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, $\langle T, (1-\chi)\psi \rangle = 0$ et

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C C_\chi \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \psi(x)|, \ \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

On en déduit que T s'étend en une application continue $\tilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$.

<u>Remarque 1.</u> En particulier, toute distribution à support compact est d'ordre fini.

6. Produit de convolution des distributions

Convolution d'une distribution par une fonction test

<u>Notation</u> Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ la fonction $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$.

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ la distribution $\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle$. ☒

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, et $\varphi, \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par le thm de Fubini,

$$\langle \varphi * f, \chi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi * f)(y)\, \chi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(y-x) \chi(y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (\check{\varphi} * \chi)(x)\, dx = \langle f, \check{\varphi} * \chi \rangle .$$

Comme d'habitude, on utilise cette relation pour <u>définir</u> $\varphi * T$ pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

<u>Définition</u> Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
On définit $\varphi * T = T * \varphi$ par

$$\langle \varphi * T, \chi \rangle = \langle T * \varphi, \chi \rangle := \langle T, \check{\varphi} * \chi \rangle, \qquad \forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

<u>Exercice</u> Montrer que cette condition définit, en effet, une distribution.

<u>Proposition</u> 1) Pour tous $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\alpha(\varphi * T) = (\partial^\alpha \varphi) * T = \varphi * (\partial^\alpha T).$$

2) Pour tous $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$(\varphi * \psi) * T = \varphi * (\psi * T)$$

Démonstration

1) Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par les définitions, on a

$$\langle \partial^\alpha(\varphi * T), \chi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \varphi * T, \partial^\alpha \chi \rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{\varphi} * (\partial^\alpha \chi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\check{\varphi} * \chi) \rangle$$

$$= \langle \partial^\alpha T, \check{\varphi} * \chi \rangle = \langle \varphi * (\partial^\alpha T), \chi \rangle,$$ et

$$(-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{\varphi} * (\partial^\alpha \chi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, (\partial^\alpha \check{\varphi}) * \chi \rangle$$

$$= \langle T, (\partial^\alpha \varphi)^\vee * \chi \rangle = \langle (\partial^\alpha \varphi) * T, \chi \rangle.$$

2) Si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle (\varphi * \psi) * T, \chi \rangle = \langle T, (\varphi * \psi)^\vee * \chi \rangle$$ et

$$\langle \varphi * (\psi * T), \chi \rangle = \langle \psi * T, \check{\varphi} * \chi \rangle$$

$$= \langle T, \check{\psi} * (\check{\varphi} * \chi) \rangle,$$

donc il suffit de vérifier que $(\varphi * \psi)^\vee * \chi = \check{\psi} * (\check{\varphi} * \chi)$.

On calcule :

$$((\varphi * \psi)^\vee * \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y)(\varphi * \psi)(-y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-y-z)\psi(z)\, dz\, dy,$$

$$(\check{\psi} * (\check{\varphi} * \chi))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-x+y')(\check{\varphi} * \chi)(y')\, dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-x+y') \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z'-y')\chi(z')\, dz'\, dy',$$

ce qui est la même chose par le changement des variables $(y', z') = (x+z, x-y)$. $\square$

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y) f(y) dy = \langle f, \varphi(x-\cdot)\rangle.$$

Cela reste vrai pour les distributions:

<u>Théorème</u> Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(T*\varphi)(x) = \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

<u>Démonstration</u>

Soit $\psi(x) := \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle$. On montre d'abord que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et ensuite que $T * \varphi = \psi$.

Il suffit de vérifier que $\psi \in C^1$ et $\partial_{x_j} \psi(x) = \langle T, \partial_{x_j} \varphi(x-\cdot)\rangle$.

Par récurrence, il en résultera que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, soit $\varphi_x(y) := \varphi(x-y)$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $x_n \to x_0$. On voit alors qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $\text{supp}(\varphi_{x_n}) \subset K$, $\forall n$, et $\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi_{x_n}(y) - \partial^\alpha \varphi_{x_0}(y)| = 0$,

donc $\varphi_{x_n} \longrightarrow \varphi_{x_0}$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc $\psi(x_n) \to \psi(x_0)$, donc ψ est une fonctions continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et considérons

$$\psi(x_0 + he_j) - \psi(x_0) - h\langle T, \partial_{x_j} \varphi(x_0 - \cdot)\rangle =$$
$$= \langle T, \varphi(x_0 + he_j - \cdot) - \varphi(x_0 - \cdot) - h\,\partial_{x_j} \varphi(x_0 - \cdot)\rangle$$

Par la formule de Taylor,

$$\varphi(x_0 + he_j - y) - \varphi(x_0 - y) - h\partial_{x_j} \varphi(x_0 - y) =$$
$$= h^2 \int_0^1 (1-s)\, \partial_{x_j}^2 \varphi(x_0 - y + hse_j)\, ds.$$

En dérivant par rapport à y sous le signe d'intégration, on obtient que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\exists\, C_\alpha \geq 0$ tq

$$\sup_{y \in K} \left| \partial^\alpha \left(\varphi(x_0 + he_j - y) - \varphi(x_0 - y) - h \partial_{x_j} \varphi(x_0 - y) \right) \right| \leq C_\alpha h^2,$$

donc $\quad \left| \psi(x_0 + h) - \psi(x_0) - h \langle T, \partial_{x_j} \varphi(x_0 - \cdot) \rangle \right| \lesssim h^2,$

ce qui montre que $\partial_{x_j} \psi(x_0) = \langle T, \partial_{x_j} \varphi(x_0 - \cdot) \rangle$.

Montrons maintenant que $T * \varphi = \psi$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il faut vérifier que

$$\langle T * \varphi, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle \Leftrightarrow \langle T, \check{\varphi} * \chi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle$$

$$\Leftrightarrow \left\langle T, y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) \chi(x) dx \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x) \langle T, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle \, dx,$$

il faut donc justifier la possibilité d'échanger l'ordre de T et $\int$. L'idée est d'approcher l'intégrale par sa somme de Riemann, et d'utiliser la linéarité de T.

Pour $h > 0$, soit $\quad \xi_h(y) := h^d \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ hz \in \operatorname{supp} \chi}} \varphi(hz - y) \chi(hz)$.

Alors tous les $\operatorname{supp}(\xi_h)$ sont dans un compact fixe K pour $|h| \leq 1$, et $\lim_{h \to 0} \xi_h = y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) \chi(x) dx$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$. En effet, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \xi_h$ est une famille de fonctions continues, bornées uniformément, et $\partial^\alpha \xi_h(y) \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha \varphi(x-y) \chi(x) dx$ pour tout $y \in K$.

Il en résulte que la convergence est uniforme.

Or, T est continue $C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, donc

$$\left\langle T, y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\chi(x)dx \right\rangle = \lim_{h\to 0} \langle T, \xi_h \rangle .$$

Pour tout $h>0$, la somme définissant ξ_h est finie, donc

$$\langle T, \xi_h \rangle = h^d \sum_{\substack{z\in \mathbb{Z}^d \\ hz \in \operatorname{supp}\chi}} \langle T, y \mapsto \varphi(hz-y)\chi(hz)\rangle =$$

$$= h^d \sum_{\substack{z\in \mathbb{Z}^d \\ hz \in \operatorname{supp}\chi}} \chi(hz) \langle T, y \mapsto \varphi(hz-y)\rangle = h^d \sum_{\substack{z\in \mathbb{Z}^d \\ h\in \operatorname{supp}\chi}} \chi(hz)\psi(hz).$$

La fonction ψ est continue, donc la dernière somme de Riemann converge vers $\langle \psi, h \rangle$. $\square$

<u>Théorème</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Il existe une suite $(\psi_n)_n$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> Soit ρ_ε le "noyau régularisant", comme au Chapitre II. 3, page 20.
Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts et $\chi_j \in C^\infty_{K_{j+1}}(\Omega)$, $\chi_j = 1$ sur K_j.
On pose $\psi_n := \rho_{1/n} * (\chi_n T)$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour n assez grand, $\chi_n = 1$ sur $\operatorname{supp}\varphi$, donc

$$\langle \psi_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\chi_n(x)(\rho_{1/n} * T)(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(\rho_{1/n} * T)(x)\,dx = \langle \rho_{1/n} * T, \varphi \rangle =$$

$$= \langle T, \check{\rho}_{1/n} * \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$$