DM I: ESPACES DE FRÉCHET, FONCTION DIFFÉRENTIABLES

À RENDRE LE 15 MARS 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et $p \in [1, \infty[$. Soit $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que

$$\int_K |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{pour tout } K \subset \Omega \text{ compact},$$

où l'on identifie, comme d'habitude, les fonctions égales presque partout.

Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω, et posons

$$p_j(u) := \left(\int_{K_j} |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}, \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N}^*, u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

(1) Montrer que $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et que $(p_j)_j$ est une famille séparante et croissante de semi-normes sur cet espace.

(2) Montrer que $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, muni de cette famille de semi-normes, est un espace de Fréchet.

(3) Formuler et démontrer un résultat analogue pour $p = \infty$.

Exercice 2. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on pose

$$\phi_t(x) = \frac{\phi(x + th) - \phi(x)}{t}.$$

(1) Montrer que $\phi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) Montrer que, lorsque $t \to 0$, ϕ_t converge dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vers une fonction à déterminer.

Exercice 3. Soit X un espace vectoriel muni d'une famille séparante de semi-normes $(p_j)_j$. On dira qu'un ensemble $A \subset X$ est *borné* si

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \; \exists R \geq 0 \; \forall u \in A \; \text{ on a } \; p_j(u) \leq R.$$

Montrer que tout sous-ensemble fermé et borné de $C^\infty(\Omega)$ est compact.

Exercice 4. a) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ se prolonge en une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 1.

1) Si $u, v : K \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables telles que $\int_K |u|^p dx < \infty$ et $\int_K |v|^p dx < \infty$,

alors $\int_K |\lambda u + \mu v|^p dx < \infty$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(car on sait que $L^p(K)$ est un espace vectoriel).
On a donc que $L^p_{loc}(\Omega)$ est un espace vectoriel.
On a aussi, pour la même raison,

$$\left(\int_K |u+v|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_K |u|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_K |v|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\left(\int_K |\lambda u|^p dx\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_K |u|^p dx\right)^{1/p},$$

donc pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, p_j est une semi-normes.
Montrons que la suite $(p_j)_j$ est séparante.
Soit $u : K \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que
$p_j(u) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,
autrement dit $u(x) = 0$ pour tout $x \in K_j \setminus A_j$,
où $A_j \subset K_j$ est de mesure (de Lebesgue) nulle.
Soit $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j \subset \Omega$ et $x \in \Omega \setminus A$.

Comme $\Omega \setminus A = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} K_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j\right) \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} (K_j \setminus A_j)$,

on obtient $u(x) = 0$. Mais A est de mesure nulle,
donc u est nulle presque partout,
donc $(p_j)_j$ est une suite séparante.

$K_j \subset K_{j+1}$ implique $p_j(u) \leq p_{j+1}(u)$ pour tout $u \in L^p_{loc}(\Omega)$.

2) Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p_{loc}(\Omega)$.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et considérons la suite
$$u_n^{(j)} := u_n|_{K_j}.$$
On sait (Exercice 1) que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq
$$p_j(u_m - u_n) < \varepsilon \qquad \text{pour tous } m, n \geq N_0,$$
autrement dit $(u_n^{(j)})_n$ est une suite de Cauchy dans $L^p(K_j)$.
Il existe alors $v^{(j)} \in L^p(K_j)$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{(j)} = v^{(j)}$, avec la convergeance dans $L^p(K_j)$.
Soit $v : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par
$$v(x) := \begin{cases} v^{(1)}(x) & \text{si } x \in K_1 \\ v^{(j)}(x) & \text{si } x \in K_j \setminus K_{j-1},\; j \geq 2. \end{cases}$$
On voit que v est une fonction mesurable.
Montrons que $v|_{K_j} = v^{(j)}$ (presque partout), $\forall j \in \mathbb{N}^*$.
Il suffit de montrer que, si $1 \leq l < j$, alors $v^{(l)}(x) = v^{(j)}(x)$ pour presque tout $x \in K_l$.
On a $u_n^{(j)} \to v^{(j)}$ dans $L^p(K_j)$, donc
$$u_n^{(j)}|_{K_l} \to v^{(j)}|_{K_l} \quad \text{dans } L^p(K_l).$$
Mais $u_n^{(j)}|_{K_l} = u_n^{(l)}$ et $u_n^{(l)} \to v^{(l)}$ dans $L^p(K_l)$, donc $v^{(j)}|_{K_l} = v^{(l)}$ presque partout.

On a donc $u_n|_{K_j} \to v|_{K_j}$ dans $L^p(K_j)$, autrement dit $p_j(u_n - v) \to 0$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $u_n \to v$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$.

3) Il suffit de remplacer les normes L^p par les normes L^∞, c'est-à-dire le supremum essentiel.

On définit $L^\infty_{loc}(\Omega)$ comme l'espace des fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in K} |u(x)| < \infty, \qquad \forall K \subset \Omega \text{ compact},$$

c'est-à-dire $\forall K \subset \Omega$ compact $\exists A \subset K$ de mesure nulle tel que $\sup_{x \in K \setminus A} |u(x)| < \infty$.

On pose $p_j(u) := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in K_j} |u(x)|$.

On montre comme dans 1) que $(p_j)_j$ est une suite séparante et croissante de semi-normes.

La preuve que $L^\infty_{loc}(\Omega)$ est la même que dans 2).

Exercice 2.

1) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixe, la fonction
$\psi(x) := \phi(x + th)$
est de classe C^∞ (en effet, $\partial^\alpha \psi(x) = \partial^\alpha \phi(x+th)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$).
Par conséquent, comme $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel, $\phi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2) On montrera que ϕ_t converge dans C^∞ vers la dérivée de ϕ dans la direction h, c'est-à-dire

$$\phi_t \longrightarrow \sum_{i=1}^{d} h_i \partial_{x_i} \phi \qquad \text{dans } C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Il suffit de vérifier que, $\forall K \subset \mathbb{R}^d$ compact, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et toute suite $t_n \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in K} \left| \partial^\alpha \phi_{t_n} - \sum_{i=1}^{d} h_i \partial_{x_i} \partial^\alpha \phi \right| = 0. \qquad (*)$$

On observe que

$$\partial^\alpha \phi_{t_n} = \frac{\partial^\alpha \phi(x + t_n h) - \partial^\alpha \phi(x)}{t_n} = (\partial^\alpha \phi)_{t_n},$$

donc, en rempaçant ϕ par $\partial^\alpha \phi$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $\alpha = (0, \dots, 0)$.
Il faut donc montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in K} \left| \phi_{t_n} - \sum_{i=1}^{d} h_i \partial_{x_i} \phi \right| = 0.$$

C'est une conéquence de la formule de Taylor et du fait que les dérivées 2^{nde} de ϕ sont bornées sur tout compact.

Exercice 3

Puisque $C^\infty(\Omega)$ est un espace métrique, on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité. Il faut donc montrer que, si $(\varphi_n)_n$ est une suite bornée dans $C^\infty(\Omega)$, alors elle a une sous-suite qui converge dans $C^\infty(\Omega)$.

Rappelons que la famille de semi-normes qui définit la topologie de $C^\infty(\Omega)$ est :

$$p_j^k(\varphi) := \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K_j} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

où K_j est une suite exhaustive de compacts de Ω.

Donc, $(\varphi_n)_n$ est une suite bornée dans $C^\infty(\Omega)$ si et seulement si

$$(*) \qquad \sup_n \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K_j} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| < \infty, \qquad \forall j,k\in\mathbb{N}.$$

Soit $(\varphi_n)_n$ une suite qui vérifie $(*)$.

Montrons d'abord que pour tout $j\in\mathbb{N}$ il existe une sous-suite $\varphi_{n_1^{(j)}}, \varphi_{n_2^{(j)}}, \dots$ qui converge uniformément sur K_j.

En effet, on a $\sup_n \sup_{x\in K_j} \left(|\varphi_n(x)| + |\nabla\varphi_n(x)|\right) < \infty$, donc le théorème d'Ascoli donne l'existence de $n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \dots$

Par la méthode de Cantor, on obtient qu'il existe une sous-suite $\varphi_{n_1^{(0)}}, \varphi_{n_2^{(0)}}, \dots$ de $(\varphi_n)_n$ qui converge uniformément sur tout K_j.

Par le même argument, il existe une sous-suite $\varphi_{n_1^{(1)}}, \varphi_{n_2^{(1)}}, \dots$ de $\varphi_{n_1^{(0)}}, \varphi_{n_2^{(0)}}, \dots$ telle que $\partial^\alpha \varphi_{n_i^{(1)}}$ converge uniformément sur tout K_j pour tout $|\alpha| \leq 1$.

Par récurrence, pour tout k il existe une sous-suite $\varphi_{n_1^{(k)}}\ \varphi_{n_2^{(k)}} \dots$ de $\varphi_{n_1^{(k-1)}}\ \varphi_{n_2^{(k-1)}} \dots$ telle que $\partial^\alpha_{n_i^{(k)}}$ converge uniformément sur tout K_j pour tout $|\alpha| \leq k$.

Par la méthode de Cantor, il existe une sous-suite $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \varphi_{n_3} \dots$ de $(\varphi_n)_n$ telle que $\partial^\alpha \varphi_{n_i}$ converge uniformément sur tout K_j, CQFD.

Exercice 4

a) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$.

Par le théorème fondamental, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt \underset{t=xu}{=} x\int_0^1 f'(xu)\,du$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, soit $g(x) := \int_0^1 f'(xu)\,du$.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on a

$$g^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(xu)\,du, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Comme $\frac{f(x)}{x} = g(x)$ $\forall x \neq 0$,
la preuve est terminée.

b) Supposons d'abord que $\frac{f(x)}{x^n} = g(x)$ $\forall x \neq 0$,

$g \in C^\infty(\mathbb{R})$. On a donc $f(x) = x^n g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

La règle de Leibniz donne alors
$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Inversement, soit $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que
$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$
Par la formule de Taylor avec le reste intégral,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x f^{(n)}(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$
$$= 0 + \dots + 0 + x^n \int_0^1 f^{(n)}(xu)\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du, \qquad \forall x \neq 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $g(x) := \int_0^1 f^{(n)}(xu) \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du$.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$g^{(k)}(x) = \int_0^1 x^k f^{(n+k)}(xu) \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

et $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Comme $\frac{f(x)}{x^n} = g(x) \quad \forall x \neq 0$,

la preuve est terminée.