DM I: ESPACES DE FRÉCHET, FONCTION DIFFÉRENTIABLES

À RENDRE LE 15 MARS 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et $p \in [1, \infty[$. Soit $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que

$$\int_K |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{pour tout } K \subset \Omega \text{ compact,}$$

où l'on identifie, comme d'habitude, les fonctions égales presque partout.

Soit $(K_j)_j$ une suite exhaustive de compacts de Ω, et posons

$$p_j(u) := \left(\int_{K_j} |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}, \qquad \text{pour } j \in \mathbb{N}^*, u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

(1) Montrer que $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et que $(p_j)_j$ est une famille séparante et croissante de semi-normes sur cet espace.

(2) Montrer que $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, muni de cette famille de semi-normes, est un espace de Fréchet.

(3) Formuler et démontrer un résultat analogue pour $p = \infty$.

Exercice 2. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on pose

$$\phi_t(x) = \frac{\phi(x + th) - \phi(x)}{t}.$$

(1) Montrer que $\phi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) Montrer que, lorsque $t \to 0$, ϕ_t converge dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vers une fonction à déterminer.

Exercice 3. Soit X un espace vectoriel muni d'une famille séparante de semi-normes $(p_j)_j$. On dira qu'un ensemble $A \subset X$ est *borné* si

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \ \exists R \geq 0 \ \forall u \in A \ \text{ on a } \ p_j(u) \leq R.$$

Montrer que tout sous-ensemble fermé et borné de $C^\infty(\Omega)$ est compact.

Exercice 4. a) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ se prolonge en une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.