DM II: FONCTIONS À SUPPORT COMPACT, CONVOLUTIONS

À RENDRE LE 22 MARS 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. On note $F := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

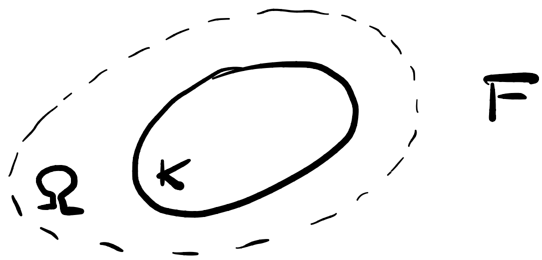
1) Soit $d(K,F) := \inf\{|x-y| : x \in K, y \in F\}$. Montrer que $d(K,F) > 0$ et que la borne inférieure est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $|x-y| = d(K,F)$. On note $\eta := d(K,F)$.
2) Pour tout $\epsilon \in \,]0,\eta[$, on pose $K_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \leq \epsilon\}$. Montrer que K_ϵ est un compact inclus dans Ω, et un voisinage de K.
3) Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive telle que $\operatorname{supp}\chi \subset B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $\chi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\chi(x/\epsilon)$. Pour tout $\epsilon \in \,]0,\eta/3[$, on définit $f_\epsilon := \chi_\epsilon * \mathbb{1}_{K_{2\epsilon}}$. Montrer que $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie
$$\operatorname{supp}(f_\epsilon) \subset K_{3\epsilon}, \qquad 0 \leq f_\epsilon \leq 1, \qquad f_\epsilon|_{K_\epsilon} = 1.$$
4) Montrer que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^{|\alpha|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f_\epsilon(x)| < \infty.$$
5) Soit $k \in \mathbb{N}$. Peut-on espérer trouver des fonctions f_ϵ valant 1 au voisinage de K, à support dans $K_{3\epsilon}$ et vérifiant
$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{|\alpha|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f_\epsilon(x)| = 0?$$
(Penser à la formule de Taylor.)

Exercice 2. Soit $\Omega := \,]0,1[^d \subset \mathbb{R}^d$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de la forme
$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \mathrm{e}^{2\pi i \xi_j \cdot x}, \qquad a_j \in \mathbb{C}, \xi_j \in \mathbb{Z}^d$$
est appellée un *polynôme trigonométrique*.

Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C^\infty(\Omega)$.

Indication. Soit P l'ensemble des polynômes trigonométriques. Il faut montrer que, si $u \in C^\infty(\Omega)$, alors $u \in \overline{P}$. Se ramener au cas $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ensuite, penser aux séries de Fourier. □

Exercice 1



1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} |x-y|.$$

Alors $x \mapsto d(x,F)$ est une fonction lipschitzienne de rapport 1 (en particulier, continue) et $d(x,F)=0$ si et seulement si $x \in F$, voir Proposition 6.1.2 p. 202 dans le poly.

Puisque K est compact, il existe $x_0 \in K$ tel que $d(x_0,F) = \inf_{x \in K} d(x,F) = d(K,F)$.
On a $x_0 \notin F$, donc $d(x_0,F) > 0$.

Il est clair que $y \mapsto |x_0 - y|$ atteint son inf sur F, autrement dit $\exists\, y_0 \in F$ tq

$$|x_0 - y_0| = \inf_{y \in F} |x_0 - y| = d(x_0, F) = d(K,F) = \eta.$$

2) La fonction $x \mapsto d(x,K)$ est continue, donc K_ε est un ensemble fermé.
Si $R>0$ tel que $K \subset B(0,R)$, alors l'inégalité triangulaire implique $K_\varepsilon \subset B(0,R+\varepsilon)$, donc K_ε est borné, donc compact.

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,K) < \varepsilon\}$ est ouvert, contient K et est contenu dans K_ε, donc K_ε est un voisinage de K.

Enfin, si $x \in K_\varepsilon$, alors $d(x,K) \leq \varepsilon < \eta = d(K,F)$, donc $x \notin F$, donc $x \in \Omega$, donc $K_\varepsilon \subset \Omega$.

3) Par le thm de dérivation sous le signe somme, $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Il est clair que $0 \leq f_\varepsilon(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$.

Si $x \in K_\varepsilon$ et $\chi_\varepsilon(x-y) > 0$, alors $|x-y| < \varepsilon$ et l'inégalité triangulaire implique $y \in K_{2\varepsilon}$, donc $\chi_\varepsilon(x-y) = 0 \quad \forall y \notin K_{2\varepsilon}$, donc

$$f_\varepsilon(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \chi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\,dy = 1.$$

Si $x \notin K_{3\varepsilon}$ et $y \in K_{2\varepsilon}$, alors par l'inégalité triangulaire $|x-y| > \varepsilon$, donc $\chi_\varepsilon(x-y) = 0$, donc

$$f_\varepsilon(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \chi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{K_{2\varepsilon}} 0\,dy = 0.$$

Cela prouve que $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon}$.

4) Puisque $\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \partial_x^\alpha(\chi_\varepsilon(x-y))\,dy$

$$= \int_{K_{2\varepsilon}} \varepsilon^{-n-|\alpha|} \partial^\alpha \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy, \quad \text{on obtient}$$

$$|\partial^\alpha f_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n-|\alpha|} \left|\partial^\alpha \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx = \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \chi(z)|\,dz$$

donc $$\varepsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \chi(z)|\,dz,$$

ce qui ne dépend pas de ε.

5) Soit f_ε une telle suite de fonctions.
Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $x \in K$ et $y \notin K_{3\varepsilon}$ tels que $|x-y| \leq 4\varepsilon$. Posons $g(t) = f_\varepsilon((1-t)y + tx)$ pour $0 \leq t \leq 1$. Alors $g \equiv 0$ au voisinage de $t=0$ et $g \equiv 1$ au voisinage de $t=1$, donc

$$1 = g(1) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} g^{(k)}(t)\,dt$$

On observe que $|g^{(k)}(t)| \leq (4\varepsilon)^k \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f_\varepsilon\|_{L^\infty}$,

il est donc impossible que $\sup_{|\alpha|=k} \varepsilon^k \|\partial^\alpha f_\varepsilon\|_{L^\infty} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$.

<u>Exercice 2.</u> Soit $\chi_l \in C_0^\infty(\Omega)$ tq $\chi_l = 1$ on K_l. Then, for any $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\chi_l \varphi \xrightarrow[l\to\infty]{} \varphi$ in $C^\infty(\Omega)$. Il suffit de montrer que $\chi_l \varphi \in \overline{\mathcal{P}}$ pour tout l, où l'adhérence est prise pour la topologie $C^\infty(\Omega)$.

Il suffit donc de montrer que, pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{P}$ telle que, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha u$ uniformément sur tout compact K.

On pose $$\varphi_n(x) := \sum_{|\xi| \leq n} e^{2\pi i \xi \cdot x} \int_\Omega e^{-2\pi i \xi \cdot y} u(y)\,dy$$

la n-ième somme partielle de la série de Fourier de u, vue comme une fonction sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Mais, comme $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, donc sa série de Fourier converge vers u uniformément sur $\mathbb{T}^d$, et de même pour les dérivées, donc $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha u$ uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$.