DM II: FONCTIONS À SUPPORT COMPACT, CONVOLUTIONS

À RENDRE LE 22 MARS 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. On note $F := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

1) Soit $d(K,F) := \inf\{|x-y| : x \in K, y \in F\}$. Montrer que $d(K,F) > 0$ et que la borne inférieure est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $|x-y| = d(K,F)$. On note $\eta := d(K,F)$.
2) Pour tout $\epsilon \in \,]0,\eta[$, on pose $K_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \leq \epsilon\}$. Montrer que K_ϵ est un compact inclus dans Ω, et un voisinage de K.
3) Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive telle que $\operatorname{supp}\chi \subset B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $\chi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\chi(x/\epsilon)$. Pour tout $\epsilon \in \,]0,\eta/3[$, on définit $f_\epsilon := \chi_\epsilon * \mathbb{1}_{K_{2\epsilon}}$. Montrer que $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie
$$\operatorname{supp}(f_\epsilon) \subset K_{3\epsilon}, \qquad 0 \leq f_\epsilon \leq 1, \qquad f_\epsilon|_{K_\epsilon} = 1.$$
4) Montrer que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f_\epsilon(x)| < \infty.$$
5) Soit $k \in \mathbb{N}$. Peut-on espérer trouver des fonctions f_ϵ valant 1 au voisinage de K, à support dans $K_{3\epsilon}$ et vérifiant
$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f_\epsilon(x)| = 0?$$
(Penser à la formule de Taylor.)

Exercice 2. Soit $\Omega := \,]0,1[^d \subset \mathbb{R}^d$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de la forme
$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathrm{e}^{2\pi i \xi_j \cdot x}, \qquad a_j \in \mathbb{C}, \xi_j \in \mathbb{Z}^d$$
est appellée un *polynôme trigonométrique.*

Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C^\infty(\Omega)$.

Indication. Soit P l'ensemble des polynômes trigonométriques. Il faut montrer que, si $u \in C^\infty(\Omega)$, alors $u \in \overline{P}$. Se ramener au cas $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ensuite, penser aux séries de Fourier. □