DM III: OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

À RENDRE LE 29 MARS 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

Exercice 1. Calculer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de chacune des suites de distributions ci-dessous et dire (en le justifiant brièvement) quel est l'ordre de la limite :

1) $T_n = T_{f_n}$, où $f_n(x) = n\sin(nx)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$,
2) $T_n = T_{f_n}$, où $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}$,
3) $T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$,
4) $T_n = n^2(\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\delta_0)$,
5) $T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})'$.

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de construire une distribution correspondante à la fonction $x_+^{-\alpha} = x^{-\alpha}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$, qu'on notera $\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$ ("partie finie" de $x_+^{-\alpha}$).

1) Montrer que, pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on peut écrire
$$\int_\epsilon^\infty x^{-\alpha}\phi(x)\,\mathrm{d}x = P_\phi^\alpha(\epsilon) + R_\phi^\alpha(\epsilon), \qquad \text{pour tout } \epsilon > 0,$$
où $P_\phi^\alpha(\epsilon)$ est une combinaison linéaire de puissances strictement négatives de ϵ et $R_\phi^\alpha(\epsilon)$ admet une limite lorsque $\epsilon \to 0^+$. Montrer qu'une telle décomposition est unique.
2) Montrer que la formule
$$\langle \mathrm{pf}(x_+^{-\alpha}), \phi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0^+} R_\phi^\alpha(\epsilon), \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$
définit une distribution $\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$ d'ordre exactement $\lfloor \alpha \rfloor$ (le plus grand nombre naturel $\leq \alpha$).
3) Calculer les distributions $x\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$.

Exercice 3. 1) Pour tout $R > 0$, soit $E_R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$E_R(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|x|} & \text{si } |x| \geq R, \\ -\frac{1}{4\pi R} & \text{si } |x| \leq R. \end{cases}$$
Montrer que ΔE_R (au sens des distributions) est la mesure uniforme sur la sphere $\mathbb{S}_R$ de centre 0 et de rayon R, de masse totale 1. (Indication : pour une fonction test ϕ, écrire $\langle E_R, \phi\rangle$ comme une somme de deux intégrales, et utiliser la formule de Green pour chacune d'elles.)

2) Soit $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ la distribution correspondante à la fonction localement intégrable $x \mapsto -\frac{1}{4\pi|x|}$. Montrer que $\Delta E = \delta_0$. (Indication : on a $\lim_{R\to 0^+} E_R = E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.)

Exercice 1

1) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Une intégration par parties donne

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_0^\infty n\sin(nx)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \cos(nx)\,\varphi'(x)\,dx + \varphi(0)$$

$$= -\frac{1}{n}\int_0^\infty \sin(nx)\,\varphi''(x)\,dx + \varphi(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle,$$

donc $T_{f_n} \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, qui est une distribution d'ordre 0.

2) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$, $R>0$.
On sait que $\psi(x) = \frac{1}{x}(\varphi(x) - \varphi(0))$ est une fonction lisse (elle n'est pas, en général, à support compact). On obtient

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{-R}^{R} \frac{\sin(nx)}{x}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\sin(nx)}{x}\left(x\,\psi(x) + \varphi(0)\right)dx = \int_{-R}^{R} \sin(nx)\,\psi(x)\,dx$$

$$+ \varphi(0)\int_{-nR}^{nR} \frac{\sin(y)}{dy}\,dy.$$

Par une IPP, la $1^{\text{ère}}$ intégrale $\to 0$, et la deuxième converge vers l'intégrale généralisée

$$\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \langle \pi\delta_0, \varphi\rangle,$$

donc $T_{f_n} \to \pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

$$\langle T_n, \varphi\rangle = n\left(\varphi(1/n) - \varphi(-1/n)\right) \to 2\varphi'(0), \text{ donc}$$

$T_n \to -2\delta_0'$, d'ordre 1.

4) $\langle T_n, \varphi\rangle = n^2\left(\varphi(1/n) + \varphi(-1/n) - 2\varphi(0)\right) \to \varphi''(0)$,

donc $T_n \to \delta_0''$, d'ordre 2.

5) On sait que $S_n \to S$ implique $S_n' \to S'$,

donc question 3) donne $T_n \to -2\delta_0''$, d'ordre 2.

<u>Exercice 2</u> On procède par récurrence par rapport à $k = \lfloor \alpha \rfloor$, c'est-à-dire $k < \alpha < k+1$.

Si $k = 0$, alors on pose

$$P_\phi^\alpha(\varepsilon) = 0, \qquad R_\phi^\alpha(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty x^{-\alpha}\varphi(x)\,dx.$$

Soit $k \geq 1$. Une intégration par parties donne

$$\int_\varepsilon^\infty x^{-\alpha}\varphi(x)\,dx = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1}\varphi(\varepsilon) + \frac{1}{\alpha-1}\int_\varepsilon^\infty x^{-\alpha+1}\varphi'(x)\,dx.$$

$$= \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1}\left(\varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\varepsilon^{k-1} + \frac{\varepsilon^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1}\varphi^{(k)}(t\varepsilon)\,dt\right)$$

$$+ \frac{1}{\alpha-1}P_{\phi'}^{\alpha-1}(\varepsilon) + \frac{1}{\alpha-1}R_{\phi'}^{\alpha-1}(\varepsilon), \text{ on pose donc}$$

$$P_\phi^\alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1}\left(\varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\varepsilon^{k-1}\right) + \frac{1}{\alpha-1}P_{\phi'}^{\alpha-1}(\varepsilon)$$

$$R_\phi^\alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{k+1-\alpha}}{(\alpha-1)(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1}\varphi^{(k)}(t\varepsilon)\,dt + \frac{1}{\alpha-1}R_{\varphi'}^{\alpha-1}(\varepsilon),$$

où $P_{\varphi'}^{\alpha-1}$ et $R_{\varphi'}^{\alpha-1}$ existent par l'hypothèse de récurrence.

L'unicité résulte de l'observation suivante :

Si $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m$

et $\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(a_1 \varepsilon^{-\gamma_1} + a_2 \varepsilon^{-\gamma_2} + \dots + a_m \varepsilon^{-\gamma_m} \right)$ existe,

alors $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.

(En effet, si k le plus grand tel que $a_k \neq 0$,
alors on multiplie par ε^{γ_k}
et on a une contradiction)

2) On voit que $\lim_{\varepsilon \to 0+} R_\phi^\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha - 1} \lim_{\varepsilon \to 0+} R_{\phi'}^{\alpha-1}(\varepsilon)$,

et par récurrence on trouve

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} R_\varphi^\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)} R_{\varphi^{(k)}}^{\alpha-k}(\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)\dots(\alpha-k)} \int_0^\infty x^{-\alpha+k} \varphi^{(k)}(x)\, dx.$$

Il est clair que cette formule définit une distribution d'ordre au plus k.

Pour voir que l'ordre n'est pas $\leq k-1$, on peut considérer par exemple la suite des fonctions test

$$\varphi_n(x) = \psi(nx), \quad \text{où} \quad \psi \in C^\infty_{[-1,1]}(\mathbb{R})$$

est telle que $\int_0^\infty x^{-\alpha+k} \psi^{(k)}(x)\, dx \neq 0$.

(il faut justifier qu'une telle fonction existe, ce qui est assez facile).

On a alors $\max_{j\le k-1} \sup_{x\in[-1,1]} |\varphi_n^{(j)}(x)| = O(n^{k-1})$,

et $\int_0^\infty x^{-\alpha+k} \varphi_n^{(k)}(x)\,dx = \int_0^\infty n^{\alpha-k-1} (nx)^{-\alpha+k} n^k \psi^{(k)}(nx)\, d(nx)$

$= n^{\alpha-1} \int_0^\infty x^{-\alpha+k} \psi^{(k)}(x)dx >> n^{k-1}$, puisque $\alpha > k$.

La distribution n'est donc pas d'ordre $\le k-1$.

3) En utilisant la formule

$$\langle pf(x_+^{-\alpha}), \varphi\rangle = \frac{1}{(\alpha-1)\dots(\alpha-k)} \int_0^\infty x^{-\alpha+k} \varphi^{(k)}(x)\,dx,$$

après un peu de calcul on arrive à

$$x\, pf(x_+^{-\alpha}) = pf(x_+^{-\alpha+1}) \quad \text{si} \quad \alpha > 1$$
$$x\, pf(x_+^{-\alpha}) = x_+^{1-\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha < 1$$

$$\frac{d}{dx} pf(x_+^{-\alpha}) = -\alpha\, pf(x_+^{-\alpha-1}), \quad \forall \alpha > 0.$$

<u>Exercice 3</u> 1) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Notre objectif est de démontrer que

$$\langle \Delta E_R, \varphi\rangle = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} \varphi(x)\, \sigma(dx),$$

où σ est la mesure de Hausdorff sur S_R.

Par la définition de la dérivation au sens des distributions,

$$\langle \Delta E_R, \varphi\rangle = \langle E_R, \Delta\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} E_R(x)\, \Delta\varphi(x)\,dx$$

(la 2ème égalité vient du fait que E_R est une fonction localement intégrable).

On écrit maintenant

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_R(x)\,\Delta\varphi(x)dx = -\frac{1}{4\pi R}\int_{|x|\leq R}\Delta\varphi(x)dx - \frac{1}{4\pi}\int_{|x|\geq R}\frac{1}{|x|}\Delta\varphi(x)dx.$$

Rappelons la formule de Green:

$$\int_{\Omega} f(x)\,\Delta g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\,\partial_n g(x)\,\sigma(dx) - \int_{\Omega}\nabla f(x)\cdot\nabla g(x)dx,$$

où $\partial_n g(x) = \vec{n}\cdot\nabla g(x)$ est la dérivée de g dans la direction normale extérieure à Ω, et σ est la mesure de Hausdorff.

En point x de la surface de la boule $B(0,R)$, le vecteur normal extérieur à cette boule est $\frac{x}{R}$. Par conséquent,

$$\int_{|x|\leq R}\Delta\varphi(x)\,dx = \int_{|x|=R}\frac{x}{R}\cdot\nabla\varphi(x)\,\sigma(dx),$$

$$\int_{|x|\geq R}\frac{1}{|x|}\Delta\varphi(x)dx = \int_{|x|=R}\frac{1}{R}\left(-\frac{x}{R}\right)\cdot\nabla\varphi(x)\sigma(dx)$$

$$-\int_{|x|\geq R}\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx, \quad \text{donc}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_R(x)\,\Delta\varphi(x)dx = \frac{1}{4\pi}\int_{|x|\geq R}\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx.$$

En appliquant encore une fois la formule de Green,

$$\int_{|x|\geq R}\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx = -\int_{|x|=R}\frac{x}{R}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)\sigma(dx) - \int_{|x|\geq R}\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)dx.$$

Il suffit maintenant de calculer :

$$\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right) = -\frac{x}{|x|^3}$$

$$\partial_{x_1}^2\left(\frac{1}{|x|}\right) = \partial_{x_1}\left(-\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\right) = -\frac{1}{|x|^3} + \frac{3x_1^2}{|x|^5}$$

donc $\quad \Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) = (\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2)\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_R(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{4\pi}\int_{|x|=R} \frac{x}{R}\cdot\left(-\frac{x}{|x|^3}\right)\varphi(x)\,\sigma(dx)$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\int_{|x|=R} \varphi(x)\,\sigma(dx).$$

2) On voit que $\lim\limits_{R\to 0^+} E_R = E$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, (on observe que la singularité de E en 0 est intégrable), donc aussi $\lim\limits_{R\to 0^+} E_R = E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. La dérivation est une opération continue pour la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, donc

$$\Delta E = \lim_{R\to 0^+} \Delta E_R.$$

Il reste à montrer que $\lim\limits_{R\to 0^+} \frac{1}{4\pi R^2}\sigma_R = \delta_0$,

où σ_R est la mesure de Hausdorff sur la sphère de centre 0 et de rayon R.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. On a

$$\left|\left\langle \frac{1}{4\pi R^2}\sigma_R - \delta_0, \varphi\right\rangle\right| = \frac{1}{4\pi R^2}\left|\int_{|x|=R} (\varphi(x)-\varphi(0))\,\sigma(dx)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x|=R} R \sup_{|y|\leq R} |\nabla\varphi(y)| \, \sigma(dx)$$

$$\leq R \sup_{|y|\leq R} |\nabla\varphi(y)| \xrightarrow[R\to 0^+]{} 0,$$

ce qui termine la preuve.