# DM III: OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

À RENDRE LE 29 MARS 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

**Exercice 1.** Calculer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de chacune des suites de distributions ci-dessous et dire (en le justifiant brièvement) quel est l'ordre de la limite :

1) $T_n = T_{f_n}$, où $f_n(x) = n\sin(nx)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$,
2) $T_n = T_{f_n}$, où $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}$,
3) $T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$,
4) $T_n = n^2(\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\delta_0)$,
5) $T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})'$.

**Exercice 2.** Soit $\alpha > 0$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de construire une distribution correspondante à la fonction $x_+^{-\alpha} = x^{-\alpha}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$, qu'on notera $\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$ ("partie finie" de $x_+^{-\alpha}$).

1) Montrer que, pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on peut écrire
$$\int_\epsilon^\infty x^{-\alpha}\phi(x)\,\mathrm{d}x = P_\phi^\alpha(\epsilon) + R_\phi^\alpha(\epsilon), \qquad \text{pour tout } \epsilon > 0,$$
où $P_\phi^\alpha(\epsilon)$ est une combinaison linéaire de puissances strictement négatives de $\epsilon$ et $R_\phi^\alpha(\epsilon)$ admet une limite lorsque $\epsilon \to 0^+$. Montrer qu'une telle décomposition est unique.
2) Montrer que la formule
$$\langle \mathrm{pf}(x_+^{-\alpha}), \phi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0^+} R_\phi^\alpha(\epsilon), \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$
définit une distribution $\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$ d'ordre exactement $\lfloor \alpha \rfloor$ (le plus grand nombre naturel $\leq \alpha$).
3) Calculer les distributions $x\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$.

**Exercice 3.** 1) Pour tout $R > 0$, soit $E_R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$E_R(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|x|} & \text{si } |x| \geq R, \\ -\frac{1}{4\pi R} & \text{si } |x| \leq R. \end{cases}$$
Montrer que $\Delta E_R$ (au sens des distributions) est la mesure uniforme sur la sphere $\mathbb{S}_R$ de centre 0 et de rayon $R$, de masse totale 1. (Indication : pour une fonction test $\phi$, écrire $\langle E_R, \phi\rangle$ comme une somme de deux intégrales, et utiliser la formule de Green pour chacune d'elles.)

2) Soit $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ la distribution correspondante à la fonction localement intégrable $x \mapsto -\frac{1}{4\pi|x|}$. Montrer que $\Delta E = \delta_0$. (Indication : on a $\lim_{R\to 0^+} E_R = E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.)