DM IV: SUPPORT D'UNE DISTRIBUTION

À RENDRE LE 5 AVRIL 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

Exercice 1. 1) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $fT = 0$. Montrer que $\mathrm{supp}(T) \subset \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$.

2) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $\exp(-x^{-2})T = 0$ (c'est-à-dire, trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $\exp(-x^{-2})T = 0$, où $\exp(-x^{-2})$ est définie en $x = 0$ par continuité, de sorte que $\exp(-x^{-2}) \in C^\infty(\mathbb{R})$).

3) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x - x_0)^k T = 0$ si, et seulement si, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$T = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \delta_{x_0}^{(j)}.$$

4) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $\sin(x)T = 0$. (Indication : penser au principe de recollement.)

5) Soit P un polynôme. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $P(x)T = 0$.

Exercice 2. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(]0, \infty[)$, $f(x) \geq 0$ pour presque tout x. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T|_{]0,\infty[} = f$ si, et seulement si, il existe $l \geq 0$ tel que $\limsup_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^l \int_\epsilon^1 f(x)\, \mathrm{d}x < \infty$.

Exercice 1.

1) Soit $A := \Omega \setminus \{x \in \Omega : f(x) = 0\} = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Par la définition du support d'une distribution, il faut montrer que $\langle T, \varphi \rangle = 0$
$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset A$.

Soit $\psi(x) := \begin{cases} \varphi(x)/f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$

Alors $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\varphi = f\psi$, donc
$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, f\psi \rangle = \langle fT, \psi \rangle = 0$ puisque $fT = 0$.

2) Par la question 1), $\exp(-x^2) T = 0$ implique $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$, donc par un thm du cours $T = \sum_{j=0}^{J} a_j \delta_0^{(j)}$.

Inversement, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors la formule de Leibniz donne $(\exp(-x^2)\varphi(x))^{(j)}(0) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, donc

$$\left\langle \exp(-x^2) \sum_{j=0}^{J} a_j \delta_0^{(j)}, \varphi \right\rangle = \sum_{j=0}^{J} (-1)^j a_j (\exp(-x^2)\varphi)^{(j)}(0) = 0.$$

3) Par le même argument que tout à l'heure,

$$(x - x_0)^k T = 0 \Rightarrow T = \sum_{j=0}^{J} a_j \delta_{x_0}^{(j)}, \quad a_J \neq 0.$$

Supposons que $J \geq k$. Soit χ une fonct. plateau.
On a

$$\left\langle (x - x_0)^k T, (x - x_0)^{J-k} \chi(x - x_0) \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{J} (-1)^j a_j \left((x - x_0)^J \chi(x - x_0) \right)^{(j)}(x_0) =$$

$$= (-1)^J a_J J! \neq 0, \text{ donc } (x - x_0)^k T \neq 0.$$

Par un calcul similaire, $T = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \delta_{x_0}^{(j)}$ est solution

4) Soit $\chi \in C^\infty_{[-\frac{7}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi]}(\mathbb{R})$ telle que

$\chi(x) = 1 \quad \forall x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $T_k := \chi(\cdot - k\pi) T$.

Alors $(x - k\pi) T_k = 0$.

En effet, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\langle (x - k\pi) T_k, \varphi \rangle = \langle T, (x-k\pi)\chi(x-k\pi)\varphi \rangle$$

$$= \langle T, \sin x \, \frac{(x-k\pi)\chi(x-k\pi)}{\sin x} \varphi \rangle = 0,$$

puisque $\frac{(x-k\pi)\chi(x-k\pi)}{\sin x} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Par la question précédente, $T_k = a_k \delta_{k\pi}$.

Soit $\Omega_k :=]k\pi - \frac{3}{4}\pi, k\pi + \frac{3}{4}\pi[$.

Alors $T_{|\Omega_k} = T_k{}_{|\Omega_k} = a_k \delta_{k\pi} = S_{|\Omega_k}$,

où $S := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{k\pi}$, càd $\langle S, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(k\pi)$.

Par la partie "unicité" du principe de recollement,

$$T = S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{k\pi}$$

5) Similaire à la question 4).

Exercice 2

Soit d'abord $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^l \int_\varepsilon^1 f(x)\, dx < \infty$$

On pose alors

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_0^\infty f(x) x^l \int_0^1 \frac{(1-t)^{l-1}}{(l-1)!} \varphi^{(l)}(tx)\, dt\, dx.$$

Si $\varphi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$, alors par la formule de Taylor

$$\varphi(x) = x^l \int_0^1 \frac{(1-t)^{l-1}}{(l-1)!} \varphi^{(l)}(tx)\, dt \qquad \forall x > 0,$$

donc $T_{|]0,\infty[} = f$.

Inversement, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tq $T_{|]0,\infty[} = f$.

Soit C, L tels que

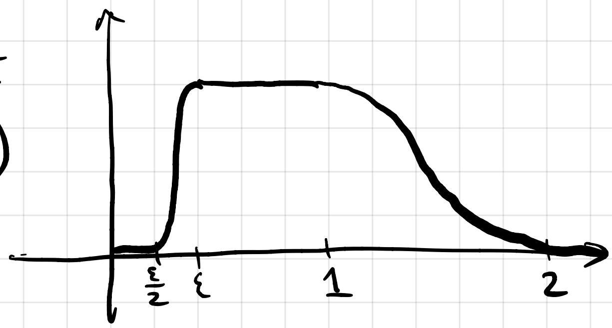
$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{j \leq L} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(x)|, \quad \forall \varphi \in C^\infty_{[-2,2]}(\mathbb{R}).$$

Soit $0 \leq \chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ tq $\chi_1(x) = 0 \quad \forall x \leq \frac{1}{2}$
et $\chi_1(x) = 1 \quad \forall x \geq 1$

$0 \leq \chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ tq $\chi_2(x) = 1 \quad \forall x \leq 1$
$\chi_2(x) = 0 \quad \forall x \geq 2.$

On considère les fonctions test

$$\varphi_\varepsilon(x) := \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi_2(x)$$



Par la règle de Leibniz, $\forall j \in \mathbb{N}$ on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon^{(j)}(x)| \leqslant C_j\, \varepsilon^{-j}, \text{ donc}$$

$$|\langle T, \varphi_\varepsilon \rangle| \leqslant \tilde{C}\, \varepsilon^{-L}, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Mais $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ et $\varphi_\varepsilon \geqslant 0$, $f \geqslant 0$, donc

$$\langle T, \varphi_\varepsilon \rangle = \langle T_{|]0,\infty[}, \varphi_\varepsilon \rangle = \langle f, \varphi_\varepsilon \rangle =$$

$$= \int_0^\infty f(x)\,\varphi_\varepsilon(x)\,dx \geqslant \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx, \text{ donc}$$

$$\varepsilon^L \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx \leqslant \tilde{C} \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$