DM IV: SUPPORT D'UNE DISTRIBUTION

À RENDRE LE 5 AVRIL 2022, EN PERSONNE OU PAR COURRIEL

Exercice 1. 1) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $fT = 0$. Montrer que $\operatorname{supp}(T) \subset \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$.

2) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $\exp(-x^{-2})T = 0$ (c'est-à-dire, trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $\exp(-x^{-2})T = 0$, où $\exp(-x^{-2})$ est définie en $x = 0$ par continuité, de sorte que $\exp(-x^{-2}) \in C^\infty(\mathbb{R})$).

3) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x - x_0)^k T = 0$ si, et seulement si, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$T = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \delta_{x_0}^{(j)}.$$

4) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $\sin(x)T = 0$. (Indication : penser au principe de recollement.)

5) Soit P un polynôme. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $P(x)T = 0$.

Exercice 2. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(]0,\infty[)$, $f(x) \geq 0$ pour presque tout x. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T|_{]0,\infty[} = f$ si, et seulement si, il existe $l \geq 0$ tel que $\limsup_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^l \int_\epsilon^1 f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.