Analyse harmonique, option “Distributions”

Université Sorbonne Paris Nord, M1-Math

Examen du 21/04/2022 (durée 3h)

Instructions.

— Le sujet comporte 4 problèmes.
— Vous pouvez utiliser 1 feuille A4 de notes.
— Écrivez vos solutions en utilisant des phrases complètes en langue française. Essayez s'il vous plaît d'écrire lisiblement et n'oubliez-pas de numéroter les pages.
— Vous pouvez utiliser tout résultat correct énoncé dans les notes de cours, les DM ou les TD, à condition d'indiquer clairement le résultat utilisé.
— Vous pouvez utiliser chaque sous-problème dans la suite de la solution, même si vous ne l'avez pas résolu.
— Vous n'êtes pas obligés de suivre les indications ; si vous donnez une solution différente de celle proposée, vous aurez le nombre maximal de points.

Problème 1. 1) Trouver toutes les distributions $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$S' + S = \delta_0.$$

Indication : Considérer la distribution $\exp \times S$.

2) Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$T'' + 3T' + 2T = \delta_0.$$

Indication : Considérer la distribution $S = T' + 2T$.

Problème 2. 1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact, et pour tout $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ soit $f_n(x) := nf(nx)$. Montrer que

$$f_n \to \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact, et pour tout $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ soit $g_n(x) := n^2 g(nx)$. Montrer que si la suite $(g_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ensuite montrer que, réciproquement, si $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors

$$g_n \to \left(-\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x \right) \delta_0' \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

3) Soit $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact, et pour tout $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ soit $h_n(x) := n^k h(nx)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(h_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et trouver sa limite lorsqu'elle existe.

Problème 3. Démontrer que la relation suivante définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ d'ordre exactement 1 :

$$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{\substack{|x| \geq \varepsilon \\ |y| \geq \varepsilon}} \frac{\varphi(x, y)}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Indication : Montrer, en considérant séparément les cas $x \leq y$ et $x \geq y$, que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $x, y \geq 0$ il y a l'inégalité

$$|\varphi(x, y) - \varphi(-x, y) - \varphi(x, -y) + \varphi(-x, -y)| \leq$$
$$\leq 4\sqrt{xy}\,\max(\|\partial_x \varphi\|_{L^\infty}, \|\partial_y \varphi\|_{L^\infty}).$$

Problème 4. 1) Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\rho(x/\epsilon)$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, et pour tout $\epsilon > 0$ soit $\varphi_\epsilon := \rho_\epsilon * \varphi$. Montrer que $\varphi_\epsilon \to \varphi$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ lorsque $\epsilon \to 0^+$.

Indication : Commencer par montrer que $\varphi_\epsilon \to \varphi$ uniformément.

2) Soit $P(x, y) := \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\Delta P = 2\partial_y \delta_{(0,0)}$ au sens $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Indication : Justifier que $P(x, y) = 2\partial_y U_2(x, y)$, où $U_2(x, y) = \frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$ est la solution élémentaire du laplacien en dimension 2, connue du cours.

3) Soit $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. On définit $g \otimes \delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ par la formule

$$\langle g \otimes \delta_0, \varphi\rangle := \langle g, x \mapsto \varphi(x, 0)\rangle, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Montrer que $\mathrm{supp}(g \otimes \delta_0) \subset \mathrm{supp}(g) \times \{0\}$.

4) Soit P, g et $g\otimes\delta_0$ comme dans les questions précédentes. Posons $T := P * (g \otimes \delta_0)$. Dire pourquoi $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est bien définie. Montrer que $T|_{\mathbb{R}\times]0,\infty[}$ est une fonction harmonique de classe C^∞, qu'on notera $f : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{C}$.

Indication : Vous pouvez utiliser le résultat suivant vu en cours : si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\Delta T = 0$, alors $T \in C^\infty(\Omega)$.

5) (difficile) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$ on a

$$f(x, y) = (K_y * g)(x),$$

où $K_y \in C^\infty(\mathbb{R})$ est donnée par $K_y(x) := P(x, y)$.

Indication : Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\chi(x) = 1$ pour tout $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $\chi(x) = 0$ pour tout $|x| \geq 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $P_\epsilon(x, y) := (1 - \chi(y/\epsilon))P(x, y)$ et $f_\epsilon := P_\epsilon * (g \otimes \delta_0)$. Justifier que $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et montrer que $f(x, y) = f_\epsilon(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times]\epsilon, \infty[$.

6) Pour tout $y > 0$, soit $g_y \in C^\infty(\mathbb{R})$ donnée par $g_y(x) := f(x, y)$. Montrer que $g_y \to g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque $y \to 0^+$.

Problème 1

1) Par la règle de Leibniz,

$$(\exp_x S)' = \exp(S' + S) = \exp_x \delta_0 = \delta_0,$$

ce qui est vrai si et seulement si

$$\exp_x S = H + c\mathbb{1} \Leftrightarrow S = H(x)e^{-x} + ce^{-x}.$$

2) On a, pour $S = T' + 2T$,

$$S' + S = (T' + 2T)' + (T' + 2T) = T'' + 3T' + 2T = \delta_0,$$

donc $T' + 2T = H(x)e^{-x} + ce^{-x}$

$$(\exp(2x)T)' = H(x)e^{x} + ce^{x}, \text{ donc}$$

$$\exp(2x)T = \int (H(t)e^{t} + ce^{t})\,dt$$

$$= Y(x) + ce^{x} + \tilde{c}, \quad \text{où}$$

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x e^t dt = e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = H(x)(e^x - 1)$$

$$\Rightarrow T = e^{-2x}Y(x) + ce^{-x} + \tilde{c}e^{-2x}$$

$$= H(x)(e^{-x} - e^{-2x}) + ce^{-x} + \tilde{c}e^{-2x}$$

Réciproquement, les étapes du calul étant en fait "si et seulement si",

$$T = (e^{-x} - e^{-2x})H(x) + ce^{-x} + \tilde{c}e^{-2x}$$

est solution de l'équation pour tout choix des constantes c et $\tilde{c}$.

Problème 2

1) Soit $R>0$ tel que $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$.

Alors $\operatorname{supp} f_n \subset [-\frac{R}{n}, \frac{R}{n}]$. Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} n f(nx)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy$$

$$= \int_{-R}^{R} f(y)\, \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

Par la formule de Taylor, $\exists C$ tq

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq C|x| \qquad \forall\, |x| \leq R, \text{ donc}$$

$\forall n \geq 1$

$$\left| \int_{-R}^{R} f(y)\, \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy - \int_{-R}^{R} f(y)\, \varphi(0)\, dy \right| \leq C \frac{R}{n} \int_{-R}^{R} |f(y)| dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $\langle f_n, \varphi \rangle \longrightarrow \varphi(0) \times \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$,

donc $f_n \longrightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \right) \delta_0$.

2) Soit $\operatorname{supp} g \subset [-R, R]$ et χ une fonction test telle que $\chi(x) = 1 \quad \forall\, |x| \leq R$.

Le calcul ci-dessus montre que

$$\langle g_n, \chi \rangle = n \int_{-R}^{R} g(y)\, dy,$$

ce qui ne peut converger que si $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 0$.

Réciproquement, supposons que $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Par la formule de Taylor,

$$\exists C \quad \text{tq} \quad |\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)| \leq C|x|^2 \quad \forall |x| \leq R.$$

On obtient $\forall n \geq 1$

$$\langle g_n, \varphi \rangle = n\int_{-R}^{R} g(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy,$$

$$\left| n\int_{-R}^{R} g(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy - n\int_{-R}^{R} g(y)\varphi(0)dy - n\int_{-R}^{R} g(y)\frac{y}{n}\varphi'(0)dy \right|$$

$$\leq nC\left|\frac{y}{n}\right|^2 \int_{-R}^{R} |g(y)|dy$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Mais $n\int_{-R}^{R} g(y)\varphi(0)dy = 0$, donc

$$n\int_{-R}^{R} g(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy \longrightarrow \int_{-R}^{R} y\,g(y)\varphi'(0)dy =$$

$$= \left\langle -\left(\int_{-\infty}^{\infty} y\,g(y)dy\right)\delta_0', \varphi \right\rangle.$$

3) On a déjà traité $k=1$ et $k=2$ dans les questions 1) et 2).

On va montrer que la condition nécessaire et suffisante est que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x h(x)dx = 0, \dots \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2} h(x)dx = 0.$$

Supposons d'abord que h_n converge et soit χ comme dans la question 2).

Soit $0 \leq j < k-1$. On a alors

$$\langle h_n, x^j \chi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n^k h(nx) x^j \, dx = n^{k-j-1} \int_{-\infty}^{\infty} y^j h(y) dy$$

ce qui ne peut converger que si $\int_{-\infty}^{\infty} y^j h(y) dy = 0$.

Réciproquement, supposons que $\int_{-\infty}^{\infty} y^j h(y) = 0 \quad \forall 0 \leq j < k-1$, et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Par la formule de Taylor, $\exists C$ tq

$$\left| \varphi(x) - \varphi(0) - \dots - \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!} x^{k-2} - \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1} \right| \leq C |x|^k, \quad \forall |x| \leq R.$$

On obtient

$$\langle h_n, \varphi \rangle = n^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy,$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \left[\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0) - \dots - \frac{\varphi^{(k-2)}(0)}{(k-2)!} \left(\frac{y}{n}\right)^{k-2} - \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \left(\frac{y}{n}\right)^{k-1} \right] dy \right|$$

$$\leq C \left| \frac{y}{n} \right|^k \int_{-\infty}^{\infty} |h(y)| dy,$$

et on en déduit que

$$n^{k-1}\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,\varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy \longrightarrow \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} y^{k-1}\, h(y)\,dy,$$

donc $\quad h_n \longrightarrow \dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta_0^{(k-1)}\quad$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Problème 3

On souhaite montrer que la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\{|x|,|y| \geq \varepsilon\}} \frac{\varphi(x,y)}{xy}\, dx\, dy \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

définit une distribution d'ordre au plus 1.

Pour cela, on observe d'abord que

$$\iint_{\{|x|,|y|>\varepsilon\}} \frac{\varphi(x,y)}{xy}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{x,y>\varepsilon} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(-x,y)-\varphi(x,-y)+\varphi(-x,-y)}{xy}\, dx\, dy .$$

Observons à présent que pour tout $x,y \in]0,\infty[^2$ on a l'estimation

$$|\varphi(x,y)-\varphi(-x,y)-\varphi(x,-y)+\varphi(-x,-y)| \leq 4\sqrt{xy}\, \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} .$$

En effet, supposons sans restreindre la généralité que $x \leq y$ (le cas $x \geq y$ est analogue).
On trouve

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x,y)-\varphi(-x,y)-\varphi(x,-y)+\varphi(-x,-y)| \leq \\
&\leq |\varphi(x,y)-\varphi(-x,y)| + |\varphi(x,-y)-\varphi(-x,-y)| \\
&\leq 2x\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty} + 2x\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty} \leq 4\sqrt{xy}\,\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} .
\end{aligned}$$

Soit $R>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset \{(x,y) : |x|,|y| < R\}$

Par conséquent,

$$\left| \iint_{\{|x|,|y|>\varepsilon\}} \frac{\varphi(x,y)}{xy}\, dx\, dy \right|$$

$$\leq \iint_{x,y>\varepsilon} \frac{|\varphi(x,y)-\varphi(-x,y)-\varphi(x,-y)+\varphi(-x,-y)|}{xy}\, dx\, dy$$

$$\leq \int_0^R\!\!\int_0^R \frac{4\sqrt{xy}\, \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}}{xy}\, dx\, dy = 4\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \int_0^R\!\!\int_0^R \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx\, dy$$

$$= 16\, R\, \|\nabla\varphi\|_{L^\infty},$$

ce qui prouve à la fois que la limite $\varepsilon \to 0$ dans la définition de T existe et que T est une distribution d'ordre ≤ 1 (la linéarité de T est évidente).

Enfin, supposons que T soit d'ordre 0, donc $\forall R$ il y aurait $C_R > 0$ tq $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset \{(x,y) : |x|, |y| < R\}$ on aurait l'inégalité

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_R \|\varphi\|_{L^\infty}. \qquad (*)$$

Prenons en particulier $\varphi(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ où $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} \psi \subset]-R, R[$.
On obtient $|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle vp\, \frac{1}{x}, \psi \rangle|^2$ et $\|\varphi\|_{L^\infty} = \|\psi\|_{L^\infty}^2$, donc $(*)$ donne

$$|\langle vp\, \tfrac{1}{x}, \psi \rangle| \leq \sqrt{C_R}\, \|\psi\|_{L^\infty}.$$

Comme R est quelconque et φ est quelconque à support dans $]-R, R[$, cela signifierait que $vp\frac{1}{x}$ est d'ordre 0, et on sait qu'elle ne l'est pas. Contradiction qui termine la preuve.

Problème 4

1) Soit $\delta > 0$. Il existe alors R tel que $\int_{|x| \geq R} \rho(x)dx \leq \delta$.

On a $|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| =$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)(\varphi(x-y) - \varphi(x))\, dy \right|$$

$$\leq \int_{-R\varepsilon}^{R\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) |\varphi(x-y) - \varphi(x)|\, dy$$

$$+ \int_{|y| \geq R\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) |\varphi(x-y) - \varphi(x)|\, dy$$

$$\leq \sup_{|z-x| \leq R\varepsilon} |\varphi(z) - \varphi(x)| + 2\delta \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

φ est uniformément continue, donc $\sup_{|z-x| \leq R\varepsilon} |\varphi(z) - \varphi(x)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$ uniformément par rapport à x;

et on obtient $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ uniformément.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\varphi_\varepsilon^{(k)} = \rho_\varepsilon * \varphi^{(k)}$, donc d'après ce qu'on vient de montrer, $\varphi_\varepsilon^{(k)} \longrightarrow \varphi^{(k)}$ uniformément.

2) On voit que $P(x,y) = 2\partial_y U_2(x,y)$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors

$$\langle P, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} P(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{|x| \geq \varepsilon} P(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{|x| \geq \varepsilon} 2\partial_y U_2(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{|x| \geq \varepsilon} -2\, U_2(x,y)\,\partial_y \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} -2\, U_2(x,y)\,\partial_y \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \langle 2\partial_y U_2, \varphi \rangle,$$

où on remarque que dans l'IPP il n'y a pas de terme de bord puisque l'IPP est faite par rapport à y.

Puisque $\Delta U_2 = \delta_{(0,0)}$, on obtient

$$\Delta P = \Delta(2\partial_y U_2) = 2\partial_y(\Delta U_2) = 2\partial_y \delta_{(0,0)}.$$

<u>Rqe</u> Il y a d'autres calculs possibles pour vérifier que $P = 2\partial_y U_2$ au sens $\mathcal{D}'$

3) Si $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\text{supp}\,\psi \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\text{supp}\, g \times \{0\})$, alors

la fonction $\tilde{\varphi}(x) = \psi(x,0)$ vérifie $\text{supp}\,\tilde{\varphi} \subset \mathbb{R} \setminus \text{supp}\, g$, donc $\langle g \otimes \delta_0, \tilde{\varphi} \rangle = 0$, donc

$\text{supp}(g \otimes \delta_0) \subset \text{supp}\, g \times \{0\}$.

4) T bien définie puisque $g \otimes \delta_0$ est à support compact.

$$\Delta T = 2\partial_y \delta_{(0,0)} * (g \otimes \delta_0) -$$
$$= 2\partial_y (g \otimes \delta_0),$$ donc en particulier

$\langle \Delta T, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi$ à support dans $\mathbb{R} \times]0, \infty[$,

de manière équivalente $\Delta\left(T_{|\mathbb{R}\times]0,\infty[}\right) = 0$.

5) $P_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $g \otimes \delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, donc $P_\varepsilon * (g \otimes \delta_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

On va montrer que $\langle f, \psi \rangle = \langle f_\varepsilon, \psi \rangle$ pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support dans $\mathbb{R} \times]\varepsilon, \infty[$.

On a

$$\langle f, \psi\rangle = \langle P * (g\otimes\delta_0), \psi\rangle = \langle P, (g\otimes\delta_0)^{\vee} * \psi\rangle,$$

$$\langle f_\varepsilon, \psi\rangle = \langle P_\varepsilon, (g\otimes\delta_0)^{\vee} * \psi\rangle.$$

Comme $\operatorname{supp}\left((g\otimes\delta_0)^{\vee} * \psi\right) \subset \mathbb{R}\times]\varepsilon,\infty[$ et $P|_{\mathbb{R}\times]\varepsilon,\infty[} = P_\varepsilon|_{\mathbb{R}\times]\varepsilon,\infty[}$, on obtient

$\langle f, \psi\rangle = \langle f_\varepsilon, \psi\rangle$, donc $f|_{\mathbb{R}\times]\varepsilon,\infty[} = f_\varepsilon|_{\mathbb{R}\times]\varepsilon,\infty[}$.

On observe maintenant que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times]\varepsilon,\infty[$

$$f_\varepsilon(x,y) = \langle g\otimes\delta_0, (w,z)\mapsto P_\varepsilon(x-w, y-z)\rangle$$

$$= \langle g, w\mapsto P_\varepsilon(x-w, y)\rangle$$

$$= \langle g, w\mapsto K_y(x-w)\rangle$$

$$= (g * K_y)(x)$$

6) $g_y = K_y * g$, donc $\forall \psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle g_y, \psi\rangle = \langle g, \check{K}_y * \psi\rangle.$$

Par la question 1), $\check{K}_y * \psi \longrightarrow \psi$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ lorsque $y\to 0^+$, donc $\langle g_y, \psi\rangle \longrightarrow \langle g, \psi\rangle$.

<u>Remarque</u> La fonction f construite dans ce problème est solution du <u>problème de Dirichlet</u> sur $\mathbb{R}\times[0,\infty[$

$\Delta f(x,y) = 0 \quad \forall y>0, \qquad f(\cdot,y)\to g$ lorsque $y\to 0^+$.