TD I : ESPACES DE FRÉCHET, FONCTION DIFFÉRENTIABLES

11 MARS 2022

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $k \in \mathbb{N}$ et $u, v \in C^k(\Omega)$. Montrer que $uv \in C^k(\Omega)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a la *formule de Leibniz*

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v).$$

Exercice 2. 1) Soit $x_0 \in]a, b[$ et $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f'(x)$ existe pour tout $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$ et f' s'étend en une fonction continue $]a, b[\to \mathbb{C}$. Montrer que $f \in C^1(]a, b[)$.

2) Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $E(x) := \mathrm{e}^{1/x}$ si $x < 0$ et $E(x) := 0$ si $x \geq 0$. Montrer que $E \in C^\infty(\mathbb{R})$.

3) Soit $a < b$ et $F(x) := E(a - x)E(x - b)$. Montrer que $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $F(x) \geq 0$ pour tout x, et $\operatorname{supp} F = [a, b]$.

4) Soit I la fonction définie par

$$I(x) := \int_{-\infty}^{x} F(z)\,\mathrm{d}z \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\,\mathrm{d}z.$$

Montrer que $I \in C^\infty(\mathbb{R})$, I est croissante, $I(x) = 0$ pour tout $x \leq a$, et $I(x) = 1$ pour tout $x \geq b$.

5) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $0 < a < b$. Montrer qu'il existe une fonction $J \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $0 \leq J(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $J(x) = 1$ pour tout $|x - x_0| \leq a$ et $J(x) = 0$ pour tout $|x - x_0| \geq b$.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite quelconque de nombres (réels ou complexes), et χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi|_{[-1,1]} = 1$ et $\operatorname{supp} \chi \subset [-2, 2]$.

1) On pose $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{n!} \chi\big(\frac{x}{\epsilon_n}\big)$. Montrer que pour tout n, on peut choisir $\epsilon_n > 0$ assez petit de sorte que

$$\|f_n^{(k)}\|_{L^\infty} \leq 2^{-n}, \qquad \text{pour tout } k \leq n - 1.$$

2) En considérant $\sum_n f_n$, montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$. (Théorème de Borel)

3) Rappelons que, si $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on dit que $g \in C^k([0, \infty[)$ s'il existe $a > 0$ et $\widetilde{g} \in C^k(]-a, \infty[)$ telle que $g = \widetilde{g}|_{[0,\infty[}$. Soit $f \in C([0, \infty[) \cap C^\infty(]0, \infty[)$ et supposons que $\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f \in C^\infty([0, \infty[)$.

Exercice 4. 1) Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{y \to 0+} g'(y) = \ell$ existe. Montrer que g est C^1 sur $[0, +\infty[$ et que $g'(0) = \ell$. (On utilisera le théorème des accroissements finis sur $[z, y]$ avec $0 < z < y$).

2) Soit h une fonction C^∞ impaire sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut écrire $h(y) = y h_1(y)$ avec h_1 fonction C^∞.

3) a) Soit f une fonction C^∞ paire sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On pose pour $y \in [0, +\infty[$, $g(y) = f(\sqrt{y})$. Montrer que g est C^1 sur $[0, +\infty[$. (On utilisera la première question).

b) Montrer que g est C^∞ sur $[0, +\infty[$.

4) Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux fonctions C^∞ sur $[0,+\infty[$, g_0 et g_1, telles que pour tout réel x, $f(x) = g_0(x^2) + xg_1(x^2)$.

Exercice 5. Soit X un espace vectoriel, muni d'une suite séparante de semi-normes $(p_j)_{j=1}^\infty$. Montrer que la fonction $d : X \times X \to [0,\infty[$ définie par

$$d(u,v) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)}$$

est une distance et induit la topologie de l'espace X.

Exercice 6. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^k(\Omega)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^k(\Omega)$,

ii) pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \le k$, $\partial^\alpha u_n|_K \to \partial^\alpha u|_K$ uniformément.

Ensuite, montrer la même chose pour $k = \infty$.

Exercice 7. 1) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et $k \in \mathbb{N}$. On note $BC^k(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\partial^\alpha f$ existe et est une fonction bornée continue pour tout multi-indice $|\alpha| \le k$. Montrer que $BC^k(\Omega)$, muni de la norme

$$\|f\|_{BC^k(\Omega)} := \max_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha f(x)|$$

est un espace de Banach.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

Exercice 8. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Montrer que :

i) si $T : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, alors il existe $K \subset \Omega$ compact et $g \in L^\infty(K)$ tels que

$$Tf = \int_K f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

ii) si $T : C(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, alors il existe $K \subset \Omega$ compact et une mesure borélienne complexe μ sur K tels que

$$Tf = \int_K f(x)\mu(\mathrm{d}x), \qquad \text{pour tout } f \in C(\Omega).$$

Exercice 9. Si X est un espace vectoriel topologique, on dit que $A \subset X$ est un ensemble *borné* si pour tout ouvert $U \ni 0$ il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda A \subset U$. Montrer que dans le cas d'un espace muni d'une suite séparante de semi-normes, cette définition coïncide avec celle donnée dans l'Exercice 3 du DM1. En déduire que $C^\infty(\Omega)$ n'est pas un espace de Banach (c'est-à-dire, il n'existe pas de norme sur $C^\infty(\Omega)$ qui induit la bonne topologie).