TD II: EXEMPLES DE DISTRIBUTIONS

18 MARS 2021

Définition. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert. Une *distribution* T sur Ω est une forme linéaire

$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C},$$
$$\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle$$

telle que pour tout $K \subset \Omega$ compact la forme linéaire

$$T|_{C_K^\infty(\Omega)} : C_K^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$

est continue.

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

Exercice 1. Montrer que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$).

Exercice 2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(ii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et pour toute suite $(\phi_n)_n$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant

  a) il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp} \phi_n \subset K$ pour tout n,

  b) $\partial^\alpha \phi_n \to 0$ uniformément pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$

  on a $\lim_{n\to\infty} \langle T, \phi_n \rangle = 0$.

(iii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\phi \in C_0^\infty$ avec $\operatorname{supp} \phi \subset K$ on a

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Définition. On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à k si T s'étend en une forme linéaire $\widetilde{T} : C_0^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ telle que

$$\widetilde{T}|_{C_K^k(\Omega)} \to \mathbb{C} \quad \text{est continue pour tout compact } K \subset \Omega.$$

On dit que T est d'ordre exactement k si T est d'ordre $\leq k$ et T n'est pas d'ordre $< k$.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble des distributions d'ordre $\leq k$ est un espace vectoriel.

Exercice 4. Montrer que l'extension $\widetilde{T}$ ci-dessus, si elle existe, est unique.

Exercice 5. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est une distribution d'ordre $\leq k$.

(ii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et pour toute suite $(\phi_n)_n$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant

  a) il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp} \phi_n \subset K$ pour tout n,

  b) $\partial^\alpha \phi_n \to 0$ uniformément pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$

  on a $\lim_{n\to\infty} \langle T, \phi_n \rangle = 0$.

(iii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C > 0$ telle que pour tout $\phi \in C_0^\infty$ avec $\operatorname{supp} \phi \subset K$ on a

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Exercice 6. 1) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que la formule

$$\langle T_f, \phi \rangle := \int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

définit une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0.

2) Montrer que, si $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $T_f = T_g$, alors $f = g$ presque partout.

Exercice 7. 1) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et μ une mesure borélienne sur Ω telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Montrer que la formule

$$\langle T_\mu, \phi \rangle := \int_\Omega \phi(x)\mu(\mathrm{d}x), \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

définit une distribution $T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0.

2) Montrer que, si μ, ν deux mesures boréliennes sur Ω, finies sur tout compact, alors $T_\mu = T_\nu$ implique $\mu = \nu$. (Indication : consulter le Chapitre 2 de Rudin, “Analyse réelle et complexe”.)

Exercice 8. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Montrer que la formule

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(x_0), \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

définit une distribution $\partial^\alpha \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre (exactement) k.

Exercice 9. Montrer que la formule

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle := \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

définit une distribution $\mathrm{vp}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre (exactement) 1.

Exercice 10. Montrer que la formule

$$\langle T, \phi \rangle := \sum_{j=0}^\infty \phi^{(j)}(j), \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que T n'est pas d'ordre fini, c'est-à-dire il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que T soit d'ordre $\leq k$.