

### TD III: OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

25 MARS 2022

**Exercice 1.** Définir la translation et le changement d'échelle d'une distribution sur  $\mathbb{R}^d$ . Montrer que ce sont des opérations continues  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , pour la notion de la convergence séquentielle.

**Exercice 2.** Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et  $T' = 0$ . Montrer que  $T$  est une fonction constante.

**Exercice 3.** Soit  $f \in C(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que  $T' = f$ . Montrer que  $T \in C^1(\mathbb{R})$ .

**Exercice 4.** 1) Montrer que pour tout  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  il existe  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vérifiant  $xT = S$ .

2) Résoudre dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  les équations

$$xT = 1, \quad xT = \delta_0, \quad xT = \text{vp} \frac{1}{x}.$$

**Exercice 5.** Trouver toutes les solutions dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de l'équation différentielle

$$F'' + F' + \frac{5}{4}F = \delta'_0, \quad F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

**Exercice 6.** Soit  $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable qui vérifie les conditions suivantes :

1) il existe  $B \geq 0$  tel que  $|K(x)| \leq B|x|^{-d}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,

2)  $\int_{r < |x| < s} K(x) dx = 0$  pour tous  $0 < r < s < \infty$ .

Montrer que la formule

$$\langle \text{vp} K, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} K(x) \varphi(x) dx, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

définit un élément  $\text{vp} K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , d'ordre  $\leq 1$ . Montrer que  $\text{vp} K$  est d'ordre exactement 1 si, et seulement si,  $K \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ .