TD V: APPLICATIONS À L'ÉTUDE DES EDP

8 AVRIL 2022

Exercice 1. Justifier l'existence des convolutions suivantes et les calculer :

$$\delta_a * H, \qquad \delta_0' * 1, \qquad (x^m \delta_0^{(n)}) * (x^p \delta_0^{(q)}), \qquad (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''.$$

Exercice 2. 1) Trouver une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Ensuite, pour tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ résoudre l'équation $T' = S$.

2) Généraliser au cas d'une EDO linéaire à coefficients constants quelconque. (Il faudra considérer des distributions à valeurs vectorielles.)

Exercice 3. 1) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$ tels que $\Delta T|_{B(x_0,R)} = 0$. Montrer que $T|_{B(x_0,R/2)} \in C^\infty(B(x_0, R/2))$.

2) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$ tels que $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ et $\Delta T|_{B(x_0,R)} = 0$. Montrer que $T|_{B(x_0,R/2)} \in C^\infty(B(x_0, R/2))$.

3) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\Delta T = 0$ au sens $\mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que $T \in C^\infty(\Omega)$.

4) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ et $f \in C^\infty(B(x_0, 2R))$. Montrer qu'il existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Delta g(x) = f(x)$ pour tout $x \in B(x_0, R)$.

5) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$ tels que $B(x_0, 2R) \subset \Omega$, $f \in C^\infty(B(x_0, 2R))$ et $\Delta T|_{B(x_0,R)} = f|_{B(x_0,R)}$. Montrer que $T|_{B(x_0,R/2)} \in C^\infty(B(x_0, R/2))$.

6) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\Delta T \in C^\infty(\Omega)$. Montrer que $T \in C^\infty(\Omega)$.

Exercice 4. Soit $d \geq 3$. Montrer que pour tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ il existe une unique solution de l'équation de Poisson $-\Delta T = S$ telle que $\lim_{|x|\to\infty} T(x) = 0$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $T_{\text{in}} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ il existe une unique solution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ de l'équation $\partial_t T - \frac{1}{2}\Delta_x T = \delta_0 \otimes T_{\text{in}}$ telle que $\operatorname{supp} T \subset [0, \infty[\times \mathbb{R}^d$. Montrer que $T|_{]0,\infty[\times\mathbb{R}^d} \in C^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$. Vérifier que, si $T_{\text{in}} \in C_0(\mathbb{R}^d)$, alors $T(t, \cdot) \to T_{\text{in}}$ uniformément lorsque $t \to 0^+$.