Théorème du seuil et bulles en interaction pour l'équation des applications ondulatoires critique

Jacek Jendrej, CNRS

Cours de la fondation Claude-Antoine Peccot, 2019

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objectif du cours

Ce cours est consacré à l'étude du comportement en temps long d'une certaine équation des ondes non linéaire que l'on spécifiera dans un instant. On s'intéressera en particulier aux questions suivantes :

- Est-ce que les effets non linéaires deviennent négligeables en 1ère approximation en temps long ?
- Quel est le rôle des solutions stationnaires ?
- Existence d'orbites homoclines/hétéroclines...

1.2 Description du modèle

1.2.1 Applications ondulatoires

L'équation wave maps est une généralisation de l'équation des ondes linéaire au cas des applications à valeurs dans une variété riemannienne.

Définition 1.2.1. Soit (M^{n+1}, g) une variété lorentzienne et (N^k, h) une variété riemannienne. On dit qu'une fonction lisse $\Phi : M \to N$ est une *application ondulatoire* si Φ est un point critique du lagrangien

$$\mathscr{L}(\Phi) = \frac{1}{2}\int_M \text{“}|\mathrm{d}\Phi|^2_{HS}\text{”} = \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta} h_{ab} \partial_\alpha \Phi^a \partial_\beta \Phi^b \sqrt{|\det g|}.$$

Autrement dit, si pour toute fonction lisse $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to N$ telle que

- $\Psi(0, z) = \Phi(z)$,
- $\Psi(\epsilon, z) = \Phi(z)$ en dehors d'un ensemble compact $K \subset M^\circ$,

on a

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathscr{L}(\Psi(\varepsilon, \cdot)) = 0.$$

Remarque 1.2.2. En coordonnées $z = (z^0, \dots, z^n)$ et $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^k)$, les équation d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{1}{\sqrt{|\det g(z)|}} \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(\sqrt{|\det g(z)|} g(z)^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z^\beta} \Phi(z)^a\right) + g(z)^{\alpha\beta} \Gamma^a_{bc}(\Phi(z)) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \Phi(z)^b \frac{\partial}{\partial z^\beta} \Phi(z)^c = 0,$$

où $\Gamma^a_{bc}(\Phi)$ est le symbole de Christoffel de la variété (N, h).

Remarque 1.2.3. Si $n = 0$ on obtient l'équation des géodesiques sur N. Si $N = \mathbb{R}^k$, on obtient l'équation des ondes linéaire sur M à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Remarque 1.2.4. On définit les solutions non lisses (*solutions fortes*) comme des points d'adhérence d'une suite de solutions lisses dans une topologie qui convient.

Un cas spécial important est $M^{n+1} = \mathbb{R}$ (ou S^1) $\times \widetilde{M}^n$ avec $(\widetilde{M}^n, \widetilde{g})$ une variété riemannienne. On écrit $z = (t, x)$ et on interprète la première variable comme le temps. Alors

$$\mathscr{L}(\Phi) = \int \big(T(\partial_t\Phi) - V(\mathrm{d}_x\Phi)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\iint \big(|\partial_t\Phi|^2 - |\mathrm{d}_x\Phi|^2_{HS}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

on a donc un système naturel avec une énergie conservée

$$E(\Phi) := \frac{1}{2}\int \big(|\partial_t\Phi|^2 + |\mathrm{d}_x\Phi|^2_{HS}\big)\,\mathrm{d}x.$$

Le *problème de Cauchy* consiste à trouver un point critique du lagrangien tel que $(\Phi(0), \partial_t\Phi(0)) = (\Phi_0, \Phi_1)$ deux applications données.

Les états stationnaires sont les points critiques de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}\int |\mathrm{d}_x\Phi|^2_{HS}\,\mathrm{d}x.$$

Ce sont les *applications harmoniques* $\widetilde{M} \to N$.

1.2.2 L'équation des applications ondulatoires critique

Considérons le cas $M = \mathbb{R}^{1+2}$, $z = (t, x) = (t, x_1, x_2)$ et $N = S^2 \subset \mathbb{R}^3$. On a alors

$$\mathscr{L}(\Phi) = \frac{1}{2}\iint \big(|\partial_t\Phi|^2 - |\nabla_x\Phi|^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

donc Φ est une application ondulatoire si et seulement si

$$\iint (\Box\Phi)\cdot\Psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \qquad \text{avec } \Box := \partial_t^2 - \Delta_x,$$

pour tout Ψ à support compact tel que $\Psi(t, x) \perp \Phi(t, x)$ pour tout (t, x), autrement dit

$$\Box\Phi(t, x) = \mu(t, x)\Phi(t, x), \qquad \mu(t, x) \in \mathbb{R}.$$

En dérivant deux fois la relation $\Phi\cdot\Phi = 1$ on obtient

$$\Phi\cdot(\Box\Phi) = -|\partial_t\Phi|^2 + |\nabla_x\Phi|^2,$$

donc on peut réécrire l'équation des application ondulatoires $\mathbb{R}^{1+2} \to S^2$ comme suit :

$$\Box\Phi(t, x) = -\big(|\partial_t\Phi(t, x)|^2 - |\nabla_x\Phi(t, x)|^2\big)\Phi(t, x). \tag{1.2.1}$$

L'énergie conservée est

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\partial_t \Phi|^2 + |\nabla_x \Phi|^2\right) \mathrm{d}x.$$

Cette équation a la propriété importante de *criticalité*. Soit $\lambda > 0$ et considérons

$$\Phi_\lambda(t,x) := \Phi(t/\lambda, x/\lambda).$$

On voit que Φ est une application ondulatoire si et seulement si Φ_λ l'est. De plus,

$$E(\Phi_\lambda) = E(\Phi).$$

Pour cette raison, on dit que l'équation (1.2.1) est *énergie critique*.

Remarque 1.2.5. On dit qu'un problème est *sous critique* s'il devient petit après un "zoom", et on dit qu'il est *sur critique* s'il devient grand. Il est critique s'il reste de même taille.

Afin de simplifier le problème, on exploite l'idée de la réduction aux applications possédant une certaine symétrie. Ici on étudiera les applications dites *corotationnelles*, qui ont la forme suivante :

$$\Phi(t, r\cos\theta, r\sin\theta) = \big(\sin u(t,r)\cos(k\theta), \sin u(t,r)\sin(k\theta), \cos u(t,r)\big) \in S^2, \qquad k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
&\partial_r\Phi = \partial_r u(\cos u\cos(k\theta), \cos u\sin(k\theta), -\sin u),\\
&\partial_r^2\Phi = \partial_r^2 u(\cos u\cos(k\theta), \cos u\sin(k\theta), -\sin u) - (\partial_r^2 u)\Phi,\\
&\partial_t^2\Phi = \partial_t^2 u(\cos u\cos(k\theta), \cos u\sin(k\theta), -\sin u) - (\partial_t^2 u)\Phi,\\
&\partial_\theta^2\Phi = -k^2(\sin u\cos(k\theta), \sin u\sin(k\theta), 0),\\
&\Delta\Phi = \Big(\partial_r^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u - \frac{k^2}{2r^2}\sin(2u)\Big)\big(\cos u\cos(k\theta), \cos u\sin(k\theta), -\sin u\big) - \big((\partial_r u)^2 + k^2(\sin u)^2\big)\Phi,
\end{aligned}$$

et on voit que Φ est une application ondulatoire si et seulement si la colatitude $u(t,r)$ vérifie l'équation suivante :

$$\partial_t^2 u(t,r) = \partial_r^2 u(t,r) + \frac{1}{r}\partial_r u(t,r) - \frac{k^2}{2r^2}\sin\big(2u(t,r)\big), \qquad (t,r) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[. \tag{1.2.2}$$

On dira dans ce cas que u est une application ondulatoire.

Remarque 1.2.6. Parfois on appelle les applications de cette forme *équivariantes*, mais ce n'est pas tout à fait correct puisque le terme "équivariant" signifie habituellement "invariant par l'action d'un certain groupe". Cependant, par la force de l'habitude, il peut m'arriver d'employer à tort ce terme.

1.3 Quelques proporiétés élémentaires

On trouve facilement le lagrangien et l'énergie exprimés en termes de $u(t,r)$:

$$\mathscr{L}(u) = \pi \iint \Big((\partial_t u)^2 - (\partial_r u)^2 - k^2\frac{(\sin u)^2}{r^2}\Big) r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t, \tag{1.3.1}$$

$$E(u,\partial_t u) = \pi\int_0^\infty \Big((\partial_t u)^2 + (\partial_r u)^2 + k^2\frac{(\sin u)^2}{r^2}\Big) r\mathrm{d}r.$$

On va souvent voir (1.2.2) comme un système hamiltonien, d'ordre 1 en temps, pour la paire $(u, \partial_t u)$. Comme l'espace des phases est un espace de paires de fonctions, il convient d'avoir une notation simple pour cela. On notera une paire de fonctions $(u,\dot u)$, $(v,\dot v)$ etc. Le point au dessus de u devrait faire penser à la dérivée en temps, mais n'aura pas toujours cette signification.

On utilise la même lettre E pour l'énergie potentielle :

$$E(u_0) := \pi\int_0^\infty \Big((\partial_r u_0)^2 + k^2\frac{(\sin u_0)^2}{r^2}\Big) r\mathrm{d}r,$$

Vérifions comment l'énergie potentielle se transforme sous le changement de variable $r^k = \mathrm{e}^x$. Soit $v_0(x) := u_0(\mathrm{e}^{x/k})$. Alors $\partial_x v_0(x) = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{x/k}\partial_r u_0(\mathrm{e}^{x/k})$ et $r\mathrm{d}r = \frac{1}{k}(\mathrm{e}^{x/k})^2\,\mathrm{d}x$, donc on voit que

$$E(u_0) = k\pi\int_{\mathbb{R}} \big((\partial_x v_0(x))^2 + (\sin v_0(x))^2\big)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 1.3.1. On reconnait le lagrangien du pendule mathématique.

Lemme 1.3.2. *Si $E(u_0,\dot u_0) < \infty$, alors $u_0 \in C(]0,\infty[)$ et il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $\lim_{r\to 0} u_0(r) = m\pi$ et $\lim_{r\to\infty} u_0(r) = n\pi$.*

Démonstration. Exercice. □

Il est facile de trouver les points critiques $v_0(x)$ d'énergie finie ; ce sont les fonctions $v_0(x) = n\pi$ ou $v_0(x) = n\pi \pm 2\arctan(\mathrm{e}^{x-l})$, ce qui en termes de r donne $n\pi \pm 2\arctan((r/\lambda)^k)$ pour $\lambda > 0$. On note

$$Q(r) := 2\arctan(r^k), \qquad Q_\lambda(r) := Q(r/\lambda) = 2\arctan((r/\lambda)^k).$$

Remarque 1.3.3. Le changement de variable $r^k = \mathrm{e}^x$ est très utile pour le problème stationnaire, mais l'équation d'évolution (1.2.2) se transforme mal.

Pour $m, n \in \mathbb{Z}$ on définit

$$\mathcal{E}_{m,n} := \{(u_0,\dot u_0) : E((u_0,\dot u_0)) < \infty,\ \lim_{r\to 0} u_0(r) = m\pi,\ \lim_{r\to\infty} u_0(r) = n\pi\}.$$

Les ensembles $\mathcal{E}_{m,n}$ sont des espaces affines qui jouent le rôle de l'espace critique. On s'intéressera principalement à la description du portrait de phase dans l'espace $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{0,0}$, qui est un espace vectoriel. On voit que $u_0 \equiv 0$ est le seul point stationnaire dans $\mathcal{E}$.

On définit la norme critique :

$$\|(u_0,\dot u_0)\|_{\mathcal{E}}^2 := \frac{1}{k}\int_0^\infty \Big(\dot u_0^2 + (\partial_r u_0)^2 + \frac{k^2}{r^2}u_0^2\Big) r\,\mathrm{d}r.$$

et la norme correspondante à l'énergie potentielle :

$$\|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 := \frac{1}{k}\int_0^\infty \Big((\partial_r u_0)^2 + \frac{k^2}{r^2}u_0^2\Big) r\mathrm{d}r.$$

On observe que le changement de variable $r^k = \mathrm{e}^x$ définit une isométrie $\mathcal{H} \to H^1(\mathbb{R})$.

1.4 Résultat principal

L'objectif du cours est de démontrer le résultat suivant, énoncé ici de manière quelque peu informelle :

Théorème 1. *Soit u une solution de* (1.2.2) *dans $\mathcal{E}$ telle que $E(u) \leq 8k\pi$. Alors exactement une des situations suivantes a lieu.*

— *La solution existe pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = 0$. Dans ce cas, les effets non linéaires deviennent négligeables en temps long.*

— *La solution existe pour tout temps suffisamment grand et $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = 0$.*

  — *Si $k \geq 2$, alors u existe aussi pour tout temps négatif. Il existe $\mu_0 > 0$ et une fonction continue $\lambda(t) :]-\infty, t_0] \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to-\infty} \lambda(t) = 0$ et*

$$\lim_{t\to-\infty} \big\|(u(t), \partial_t u(t)) \pm (Q_{\lambda(t)} - Q_{\mu_0}, 0)\big\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

  — *Si $k = 1$, alors u existe jusqu'à un certain temps $T_- > -\infty$. Il existe $\mu_0 > 0$ et une fonction continue $\lambda(t) :]T_-, t_0] \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to T_-} \lambda(t) = 0$ et*

$$\lim_{t\to T_-} \big\|(u(t), \partial_t u(t)) \pm (Q_{\lambda(t)} - Q_{\mu_0}, 0)\big\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

— *Situation symétrique, en échangeant t et $-t$.*

En plus, toutes ces situations sont possibles.

En fait, on va traiter uniquement le cas $k = 2$, qui est techniquement le plus simple. La plupart de l'analyse s'applique aussi dans d'autres cas.

Remarque 1.4.1. Il n'est pas difficile de voir que si $E(u_0) \leq 8k\pi$, alors $u_0 \in \mathcal{H}$ est équivalent à $\deg u_0 = 0$, le degré topologique de l'application $\mathbb{R}^2 \to S^2$ correspondante, vue comme une application $S^2 \to S^2$ (en utilisant la projection stéréographique).

On pourrait dire que le rôle joué dans des situations typiques par le point col est joué ici par un objet que l'on appellera une *deux-bulle*, c'est à dire une solution qui converge vers une superposition de deux états stationnaires dont les échelles spatiales se découplent asymptotiquement. Notons que l'unicité d'un tel objet n'est pas connue actuellement, mais il semble raisonnable de s'y attendre (à un changement d'échelle près).

Vous pouvez télécharger ici deux simulations qui ont pour but d'illustrer le théorème si-dessus :

— `https://www.math.univ-paris13.fr/~jendrej/simulations/wmap/cas1.mp4`

— `https://www.math.univ-paris13.fr/~jendrej/simulations/wmap/cas2.mp4`

1.5 Plan du cours

— Après la pause je prénterai les éléments de la théorie de Cauchy, c'est à dire du caractère bien posé de l'équation (1.2.2).

— Le 20 mai (attention la séance commence à 10h !) je parlerai de la méthode de décomposition en profils. Je présenterai la théorie linéaire dans le cadre abstrait pour ensuite l'appliquer à notre problème. On utilisera ensuite la théorie de Cauchy pour démontrer quelques résultats sur la propagation non linéaire de profils qui nous servirons par la suite.

— Le 27 mai (attention la séance commence à 10h !) je présenterai toutes les étapes de la *méthode de concentration-compacité* dans le cas de l'équation (1.2.2), ce qui permettra en particulier d'atteindre l'objectif principal pour les énergies $< 8k\pi$.

— Le 3 juin (attention la séance commence à 10h !) je parlerai de la *méthode de modulation*, très classique en analyse non linéaire (perturbative), dans le but de comprendre les deux-bulles. On dérivera un système réduit, supposé décrire l'interaction entre les bulles, et ensuite on justifiera sa validité. J'expliquerai enfin comment finir la démonstration du théorème pour $k = 2$.

Le cours est organisé autour d'un modèle très particulier. Cependant, chacune des méthodes que l'on verra (décomposition en profils, concentration-compacité, modulation) a un champs d'application bien plus vaste.

Au fur et à mesure de l'avancement du cours, les résultats deviendront de moins en moins standard et de plus en plus techniques, ce qui m'amènera à omettre de plus en plus de détails de calcul. Parfois, seulement une preuve "en agitant les mains" sera donnée, mais en principe toutes les étapes de la démonstration seront indiquées.

N'hésitez pas à m'envoyer un message à l'adresse `jendrej@math.univ-paris13.fr`, en particulier si vous remarquez une (des) fautes dans ces notes ou dans le cours, ou si vous souhaiteriez que je fournisse une preuve complète là où je n'ai donné qu'une esquisse.

Chapitre 2

Théorie de Cauchy

Dans ce chapitre on développe la théorie d'existence et d'unicité en temps court pour l'équation (1.2.2) (c'est-ce que l'on appelle la *théorie de Cauchy*).

Il est commode de réécrire l'équation en séparant la partie linéaire de la partie non linéaire :

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(t,r) &= \Big(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{k^2}{r^2}\Big)u(t,r) + \frac{2k^2u(t,r) - k^2\sin\big(2u(t,r)\big)}{2r^2} \\ &= -L_k u(t,r) + Z(u(t,r))\frac{u(t,r)^3}{r^2},\end{aligned}$$

où $Z(u) := \big(2k^2u - k^2\sin(2u)\big)/(2u^3)$ est une fonction analytique, bornée pour $u \in \mathbb{R}$.

2.1 Quelques conventions de notation

Sauf mention contraire, les normes de Lebesgue et Sobolev des fonctions de $r \in]0,\infty[$ sont toujours calculées par rapport à la mesure $r\mathrm{d}r$, et les normes en espace-temps par rapport à la mesure $\mathrm{d}t\, r\mathrm{d}r$. De plus, si le domaine en espace n'est pas précisé, alors il s'agit de tout l'espace, donc par exemple $L^1L^2(I)$ signifie $L_t^1((I,\mathrm{d}t); L_r^2(]0,\infty[, r\mathrm{d}r))$. Si le domaine en temps n'est pas précisé non plus, is s'agit de tout l'axe réel.

J'omets souvent les arguments des fonctions, donc on écrit u au lieu de $u(t,r)$, et par exemple dans ce cas $u(t)$ a la signification d'une fonction d'une seule variable r, pour tout t.

2.2 Estimations de Strichartz

Pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $u : I\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ on définit la norme suivante (une *norme de Strichartz*) :

$$\|u\|_{S(I)} := \|u^3/r^2\|_{L^1L^2(I)}^{1/3}.$$

On admettra le résultat fondamental suivant, un cas particulier du Théorème 2.6 dans le livre de Tao "Dispersive equations".

Définition 2.2.1. On dit qu'une paire (p,q) est *admissible* si $p \geq 2$ et il existe $\widetilde{q} \in [2,q]$ tel que

$$\frac{2}{p} + \frac{d-1}{\widetilde{q}} = \frac{d-1}{2}, \qquad (p,\widetilde{q},d) \neq (2,\infty,3).$$

Théorème 2.2.2 (Ginibre-Velo, Shatah-Struwe, Kapitanski, Keel-Tao)**.** *Supposons que* (p, q) *et* (a, b) *sont admissibles et*

$$\frac{1}{p} + \frac{d}{q} = \frac{1}{a'} + \frac{d}{b'} - 2 = \frac{d}{2} - \sigma.$$

Soit $u = u(t, x)$ *une solution de*

$$\partial_t^2 u = \Delta u + f, \qquad (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, \dot{u}_0), \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ u \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}; \dot{H}^\sigma \times \dot{H}^{\sigma-1})} + \|u\|_{L^p L^q} \lesssim \|(u_0, \dot{u}_0)\|_{\dot{H}^\sigma \times \dot{H}^{\sigma-1}} + \|f\|_{L^{a'} L^{b'}}.$$

Les configurations que l'on va utiliser sont

$$(\sigma, d, p, q, a, b) \in \{(1, 4, 3, 6, \infty, 2), (1, 4, 2, 8, \infty, 2), (1, 6, 2, 4, \infty, 2)\}.$$

Lemme 2.2.3. *Il existe* $C > 0$ *tel que si* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle,* $f \in L^1 L^2$ *et* u *la solution de l'équation*

$$\partial_t^2 u + L_k u = f, \quad (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1) \in \mathcal{E},$$

alors

$$\|u\|_{S(I)} + \sup_{t \in I} \|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{E}} \lesssim \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}} + \|f\|_{L^1 L^2}$$

Démonstration. On démontre le résultat uniquement pour $k \in \{1, 2\}$. Le cas général peut être traité en utilisant un résultat de Planchon, Stalker et Tahvildar-Zadeh [6].

Soit $v := r^{-k} u$ et $g := r^{-k} f$. Alors on peut vérifier que

$$\partial_t^2 v - \Big(\partial_r^2 + \frac{2k+1}{r}\partial_r\Big) v = \big(\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^d}\big) v = g,$$

ce qui est l'équation des ondes en dimension d'espace $d = 2k + 2 \in \{4, 6\}$. On voit facilement que

$$\|g(t)\|_{L^2(r^{2k+1}\mathrm{d}r)} = \|f(t)\|_{L^2(r\mathrm{d}r)}.$$

On a aussi

$$\partial_r v = -k r^{-k-1} u + r^{-k} \partial_r u,$$

donc

$$\|\partial_r v\|_{L^2(r^{2k+1}\mathrm{d}r)} = k\|u\|_{\mathcal{H}}.$$

La borne sur $\sup_{t \in I} \|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{H} \times L^2}$ est donc l'estimation d'énergie pour l'équation des ondes.

Pour $k = 1$, donc $d = 4$, on a l'estimation de Strichartz

$$\|v^3\|_{L^1 L^2(\mathrm{d}t\, r^3 \mathrm{d}r)}^{1/3} = \|v\|_{L^3 L^6(\mathrm{d}t\, r^3 \mathrm{d}r)} \lesssim \|(v_0, v_1)\|_{\dot{H}^1 \times L^2(r^3 \mathrm{d}r)} + \|g\|_{L^1 L^2(\mathrm{d}t\, r^3 \mathrm{d}r)},$$

et on remarque que

$$\|v^3\|_{L^2(r^3 \mathrm{d}r)} = \|r^{-3} u^3\|_{L^2(r^3 \mathrm{d}r)} = \|r^{-2} u^3\|_{L^2(r \mathrm{d}r)}.$$

Pour $k = 2$, donc $d = 6$, on a l'estimation de Strichartz "end-point"

$$\|v^2\|_{L^1 L^2(\mathrm{d}t\, r^5 \mathrm{d}r)}^{1/2} = \|v\|_{L^2 L^4(\mathrm{d}t\, r^5 \mathrm{d}r)} \lesssim \|(v_0, v_1)\|_{\dot{H}^1 \times L^2(r^5 \mathrm{d}r)} + \|g\|_{L^1 L^2(\mathrm{d}t\, r^5 \mathrm{d}r)}.$$

On remarque que

$$\|v^2\|_{L^2(r^5 \mathrm{d}r)} = \|r^{-4} u^2\|_{L^2(r^5 \mathrm{d}r)} = \|r^{-2} u^2\|_{L^2(r \mathrm{d}r)},$$

et il suffit d'utiliser $\|u\|_{L^\infty} \lesssim \|u\|_{\mathcal{H}}$. $\square$

Si u est une solution de l'équation linéaire $\partial_t^2 u = -L_k u$, on écrira

$$u(t) = S(t)(u(0), \partial_t u(0)), \qquad (u(t), \partial_t u(t)) = S(t)(u(0), \partial_t u(0)),$$

$k \in \{1, 2\}$ étant connu du contexte. On observe que $S(t)$ est un groupe d'isométries fortement continu dans l'espace $\mathcal{E}$. En effet, la transformation $v = r^{-k}u$ conjugue $S(t)$ avec l'équation des ondes linéaire dans $\mathbb{R}^{2k+2}$.

Lemme 2.2.3 nous donne en particulier

$$\|v_L^3/r^2\|_{L^1L^2(\mathbb{R}\times]0,\infty[)}^{1/3} \lesssim \|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}}, \qquad \text{où } v_L(t) := S(t)(v_0, v_1).$$

On aura également besoin d'une estimation rafinée suivante.

Lemme 2.2.4. *Soit $(v_0, v_1) \in \mathcal{E}$ et $v_L := S(t)(v_0, v_1)$. Alors*

$$\begin{aligned} &\textit{pour } k = 1 : \qquad \|v_L\|_{S(I)}^3 \lesssim \|v_L\|_{L^\infty L^\infty}^{1/2} \|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}}^{5/2}, \\ &\textit{pour } k = 2 : \qquad \|v_L\|_{S(I)}^3 \lesssim \|v_L\|_{L^\infty L^\infty} \|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}}^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $k = 2$ cela résulte directement de la preuve précédente.

Pour $k = 1$ on a

$$\int \frac{u^6}{r^3}\,\mathrm{d}r \leq \|u\|_{L^\infty}\Big(\int \frac{u^2}{r}\,\mathrm{d}r\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int \frac{u^8}{r^5}\,\mathrm{d}r\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En prenant la racine carrée et en intégrant en t on obtient

$$\|u^3/r^2\|_{L^1L^2} \lesssim \|u\|_{L^\infty L^\infty}^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|u/r\|_{L^2L^8(r^3\,\mathrm{d}r)}^2,$$

et on termine en utilisant l'estimation de Strichartz L^2L^8 en dimension d'espace 4. □

Remarque 2.2.5. Les exposants ne sont pas importants ; on a besoin d'une inégalité $\|v_L^3/r^2\|_{L^1L^2} \lesssim \|v_L\|_{L^\infty L^\infty}^{\alpha} \|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}}^{3-\alpha}$ pour un certain $\alpha > 0$.

Lemme 2.2.3 est suffisant pour démontrer le caractère bien posé dans l'espace d'énergie.

Lemme 2.2.6. *Pour tout $M > 0$ il existe $\eta_0 = \eta_0(M) > 0$ et $C = C(M) > 0$ qui ont la propriété suivante. Soit $0 \in I \subset \mathbb{R}$. Soit $\|(u_0, \dot{u}_0)\|_{\mathcal{E}} \leq M$ avec $\|S(t)(u_0, \dot{u}_0)\|_{S(I)} = \eta \leq \eta_0$. Alors il existe une unique solution forte $u \in L^\infty(I; \mathcal{E})$ du problème* (1.2.2). *Cette solution vérifie*

$$\sup_{t\in I} \|(u, \partial_t u) - (u_{\mathrm{L}}, \partial_t u_{\mathrm{L}})\|_{\mathcal{E}} + \|u - u_{\mathrm{L}}\|_{S(I)} \leq C\eta^3,$$

où $u_{\mathrm{L}}(t) = S(t)(u_0, u_1)$.

Démonstration. Pour $\rho \geq 0$ soit

$$B_\rho := \{u : \|(u, \partial_t u) - (u_{\mathrm{L}}, \partial_t u_{\mathrm{L}})\|_{L^\infty(I;\mathcal{E})} + \|u - u_{\mathrm{L}}\|_{S(I)} \leq \rho\}.$$

On considère l'application F qui à $u \in B_\rho$ associe $v = F(u)$, la solution du problème

$$\partial_t^2 v + L_k v = Z(u)\frac{u^3}{r^2}, \qquad (v(0), \partial_t v(0)) = (u_0, \dot{u}_0),$$

donc $w := v - u_{\mathrm{L}}$ résout le problème

$$\partial_t^2 w + L_k w = Z(u)\frac{u^3}{r^2}, \qquad (w(0), \partial_t w(0)) = (0,0),$$

Par le Lemme 2.2.3,

$$\|(w, \partial_t w)\|_{L^\infty(I;\mathcal{E})} + \|w\|_{S(I)} \lesssim \eta^3 + \rho^3,$$

donc si l'on prend $\rho = C\eta^3$ avec C une constante suffisamment grande, la boule $B(\rho)$ sera invariante.

De façon similaire on obtient que pour η_0 suffisamment petit F est une contraction sur B_ρ, pour la norme $L^\infty(I;\mathcal{E}) + S(I)$. En effet, soit $u, \widetilde{u} \in B_\rho$, $v := F(u)$, $\widetilde{v} := F(\widetilde{u})$, $w := \widetilde{v} - v$. Alors

$$\partial_t^2 w + L_k w = f(u, \widetilde{u}) := Z(\widetilde{u})\frac{\widetilde{u}^3}{r^2} - Z(u)\frac{u^3}{r^2}, \qquad (w(0), \partial_t w(0)) = (0,0).$$

On voit que

$$\|f(u, \widetilde{u})\|_{L^1L^2} \lesssim (\|\widetilde{u} - u\|_{L^\infty\mathcal{E}} + \|\widetilde{u} - u\|_S)(\eta^2 + \eta^3),$$

et on conclut en utilisant Lemme 2.2.3.

Par le Théorème de Picard il existe l'unique application $u \in B_\rho$ telle que $F(u) = u$. Comme $C(I;\mathcal{E})$ est complet, on voit que $u \in C(I;\mathcal{E})$.

□

Proposition 2.2.7. *Si $(u_0, u_1) \in \mathcal{E}$, alors il existe une unique solution forte $(u, \partial_t u) \in L^\infty(I_{\max};\mathcal{E})$ de l'équation (1.2.2), définie sur l'intervalle maximal d'existence $I_{\max} = I_{\max}(u) :=]T_-(u), T_+(u)[$ telle que $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1)$. Elle a les propriétés suivantes.*

- $(u, \partial_t u) \in C(I_{\max};\mathcal{E})$,
- *pour tout intervalle compact $J \subset I_{\max}$, u est continue par rapport à la donnée initiale (u_0, u_1), pour les topologies $\mathcal{E} \to L^\infty(J;\mathcal{E})$,*
- *pour tout intervalle compact $J \subset I_{\max}$ on a*

$$\|u\|_{S(J)} < \infty,$$

- *si*

$$\|u\|_{S([0,T_+[)} < \infty,$$

alors $T_+ = \infty$ et $(u, \partial_t u)$ se disperse quand $t \to \infty$, à savoir il existe $(v_0, v_1) \in \mathcal{E}$ tel que

$$\|(u(t), \partial_t u(t)) - S(t)(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}} \to 0 \qquad \text{quand } t \to \infty,$$

- *inversement, si u se disperse quand $t \to \infty$, alors*

$$\|u\|_{S([0,\infty[)} < \infty,$$

- *un énoncé analogue pour les temps négatifs.*

Démonstration. La première partie est une conséquence directe du lemme précédent.

Le deuxième point résulte du principe général suivant pour l'équation linéaire. Si $f \in L^1L^2([0, T_+[)$ et u solution de $\partial_t^2 u + L_k u = f$, alors

— dans le cas $T_+ < \infty$, la limite forte dans $\mathcal{E}$, $\lim_{t\to T_+}(u(t), \partial_T u(t))$, existe,

— dans le cas $T_+ = \infty$, u se disperse quand $t \to \infty$.

En effet, soit v_τ la solution de $\partial_t^2 v_\tau + L_k v_\tau = 0$ avec la donnée initiale $(v_\tau(\tau), \partial_t v_\tau(\tau)) = (u(\tau), \partial_t u(\tau))$, et $\sigma \geq \tau$. Alors

$$\begin{aligned}\|(v_\sigma(0), \partial_t v_\sigma(0)) - (v_\tau(0), \partial_t v_\tau(0))\|_{\mathcal{E}} &= \|(v_\sigma(\tau), \partial_t v_\sigma(\tau)) - (v_\tau(\tau), \partial_t v_\tau(\tau))\|_{\mathcal{E}} \\ &= \|((v_\sigma - u)(\tau), \partial_t(v_\sigma - u)(\tau))\|_{\mathcal{E}} \leq \|f\|_{L^1L^2([\tau,\sigma])} \to 0\end{aligned}$$

quand $\sigma, \tau \to T_+$, ce qui implique que la limite $(v_0, v_1) := \lim_{\tau\to\infty}(v_\tau(0), \partial_t v_\tau(0))$ existe, et on obtient

$$\lim_{t\to T_+} \|(u(t), \partial_t u(t)) - S(t)(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Enfin, si u se disperse pour $t \to \infty$, alors on voit que si l'on prend T_0 grand et $u_{\mathrm{L}}(t) := S(t - T_0)(u(T_0), \partial_t u(T_0))$, alors $\|u_{\mathrm{L}}\|_S < \eta_0$, donc on peut appliquer le lemme précédent sur l'intervalle $[T_0, \infty)$. □

Remarque 2.2.8. La même preuve montre que l'on peut résoudre le *problème de Cauchy à l'infini*. Plus préciément, dans le cas $I = [T_0, \infty[$, sous les mêmes hypothèses, il existe une unique solution forte $u \in L^\infty(I; \mathcal{E})$ de l'équation (1.2.2) telle que

$$\lim_{t\to\infty} \|(u(t), \partial_t u(t)) - (u_{\mathrm{L}}, \partial_t u_{\mathrm{L}})\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Pour cela, il suffit de définir $v = F(u)$ comme la solution du problème

$$\partial_t^2 v + L_k v = Z(u)\frac{u^3}{r^2}, \qquad \lim_{t\to\infty} \|(v(t), \partial_t v(t)) - S(t)(u_0, \dot{u}_0)\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

De la même manière on résout le problème de Cauchy pour $t \to -\infty$.

Pour finir ce chapitre, on démontre un *lemme de perturbation*.

Lemme 2.2.9. *Pour tout $M > 0$ il existe $\varepsilon = \varepsilon_0(M)$ et $C = C(M)$ ayant la propriété suivante. Soit $I = [0, T]$ ou $I = [0, +\infty[$, et soit v une fonction définie sur $I\times]0, \infty[$ telle que*

$$\|(v, \partial_t v)\|_{L^\infty(I;\mathcal{E})} + \|v\|_{S(I)} \leq M$$

et qui résout le problème

$$\begin{aligned}\partial_t^2 v + L_k v = Z(v)\frac{v^3}{r^2} + h, \quad (t, r) \in I\times]0, \infty[, \\ (v(0), \partial_t v(0)) = (v_0, \dot{v}_0) \in \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Soit $(u_0, \dot{u}_0) \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Supposons que

$$\|(u_0, \dot{u}_0) - (v_0, \dot{v}_0)\|_{\mathcal{E}} + \|h\|_{L^1L^2} \leq \varepsilon.$$

Alors la solution u du problème (1.2.2) avec la donnée initiale $(u_0, \dot{u}_0)$ est définie sur I et

$$\|(u(t), \partial_t u(t)) - (v(t), \partial_t v(t))\|_{L^\infty(I;\mathcal{E})} + \|u - v\|_{S(I)} \leq C(M)\varepsilon.$$

Remarque 2.2.10. À cause de la réversibilité temporelle un théorème analogue est vrai pour les temps négatifs.

Remarque 2.2.11. La signification de ce lemme est la suivante. Si on a une solution approchée v, alors la vraie solution u existe aussi longtemps que v et en reste proche.

Démonstration. On démontre d'abord le résultat sous l'hypothèse supplémentaire que $\|v\|_{S(I)} \leq \eta_0$ est suffisamment petit. Dans ce cas, on obtient la conclusion par un argument de continuité. En effet, soit $I' \subset I$ un intervalle sur lequel u est définie et considérons $w := u-v$, $(w_0, \dot{w}_0) := (u_0-v_0, \dot{u}_0-\dot{v}_0)$. L'équation pour w est la suivante :

$$\partial_t^2 w + L_k w = f := Z(v+w)\frac{(v+w)^3}{r^2} - Z(v)\frac{v^3}{r^2} - h.$$

On voit que

$$\|f\|_{L^1 L^2(I')} \lesssim (\|w\|_{L^\infty(I';\mathcal{E})} + \|w\|_{S(I')})(\|v\|_{S(I')}^2 + \|w\|_{S(I')}^2 + \|w\|_{S(I')}^3) + \|h\|_{L^1 L^2(I')}.$$

En appliquant le Lemme 2.2.3 on obtient

$$\|w\|_{L^\infty(I';\mathcal{E})} + \|w\|_{S(I')} \lesssim \varepsilon + (\|w\|_{L^\infty(I';\mathcal{E})} + \|w\|_{S(I')})(\|v\|_{S(I')}^2 + \|w\|_{S(I')}^2 + \|w\|_{S(I')}^3).$$

Si $\|w\|_{S(I')}$ est suffisamment petit, alors on peut absorber le deuxième terme et conclure que $\|w\|_{S(I')} \lesssim \varepsilon$. On obtient l'estimation voulue en élargissant I' progressivement.

Maintenant, soit $n := \left[\frac{M}{\eta_0}\right] + 1$. Alors il existe $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ une suite telle que $\|v\|_{S(J)} \leq \eta_0$ pour $J = [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$. On répète le raisonnement sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. $\square$

Chapitre 3

Décomposition en profils

Dans ce chapitre on présente le méthode de décomposition en profils, développée dans les travaux de plusieurs mathématiciens, en particulier Lions, Brézis et Coron, Gérard, Merle et Vega, Bahouri et Gérard, ... Le cadre abstrait présenté ici a été proposé par Schindler et Tintarev.

3.1 Théorie abstraite

Soit H un espace de Hilbert séparable et G un topologique métrisable agissant sur H par des isométries (une *représentation unitaire*),

$$G \ni g \mapsto T_g \in U(H).$$

Remarque 3.1.1. On peut facilement traiter le cas où G n'agit pas par des isométries, mais seulement de façon bornée, c'est à dire

$$G \ni g \mapsto T_g \in \mathscr{L}(H), \qquad \sup_{g\in G} \|T_g\|_{\mathscr{L}(H)} < \infty.$$

En effet, en remplaçant la norme $\|u\|_H$ par la norme équivalente $\sup_{g\in G} \|T_g u\|_H$, on se ramène au cas des applications unitaires. Dans la pratique, on a presque toujours affaire à une représentation unitaire.

On écrira le plus souvent gu au lieu de $T_g u$.

Définition 3.1.2. Pour une suite $g_n \in G$ on écrit $g_n \to \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} g_n = \infty$ si pour tout ensemble compact $K \subset G$ on a $g_n \notin K$ pour n grand. On dit que deux suites g_n et $\widetilde{g}_n$ sont *orthogonales* si $g_n^{-1}\widetilde{g}_n \to \infty$.

Définition 3.1.3. On dit qu'une suite $u_n \in H$ converge vers 0 *faiblement avec concentration* si

$$g_n u_n \rightharpoonup 0, \qquad \forall g_n \in G.$$

On écrit dans ce cas

$$u_n \rightharpoonup_G 0.$$

On observe que la topologie de la convergence faible avec concentration sur une boule de H est métrisable de manière suivante. Soit ϕ_k une suite dense dans la boule unité de H. On définit

$$\|u\|_W := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_k, u\rangle^2}{2^k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_G := \sup_{g\in G} \|gu\|_W.$$

Lemme 3.1.4. *Si $u_n \in H$ une suite bornée, alors après extraction d'une sous-suite il existe une suite $g_n \in G$ telle que*

$$g_n u_n \rightharpoonup u \qquad et \qquad \|u\|_H \geq \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_G.$$

Démonstration. En extrayant une sous-suite, il existe une suite $g_n \in G$ telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\langle \phi_k, g_n u_n\rangle^2 \to \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_G^2.$$

Après une nouvelle extraction d'une sous-suite, $g_n u_n \rightharpoonup u \in H$, et on voit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\langle \phi_k, g_n u_n\rangle^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\langle \phi_k, u\rangle^2 \leq \|u\|_H^2,$$

ce qui termine la preuve. □

Proposition 3.1.5. *Soit $u_n \in H$ une suite bornée. Alors*

$$u_n \rightharpoonup_G 0 \;\Leftrightarrow\; \|u_n\|_G \to 0.$$

Démonstration. L'implication $\Rightarrow$ est une conséquence directe des définitions et du lemme précédent.

Inversement, si $\|u_n\|_G \to 0$, alors pour tout k on a $\sup_{g_n\in G}\langle \phi_k, g_n u_n\rangle \to 0$. Soit $g_n \in G$ une suite quelconque. Comme la suite $g_n u_n$ est bornée dans H, on obtient $\langle \phi, g_n u_n\rangle \to 0$ pour tout $\phi \in H$, donc $u_n \rightharpoonup_G 0$. □

On fait encore deux hypothèses concernant l'action du groupe G :

— $g_n \to \infty$ implique $\langle u, g_n v\rangle \to 0$ pour tout $u, v \in H$ (évanescence des coefficients matriciels),

— pour tout $u \in H$ l'application $G \ni g \mapsto gu \in H$ est continue (continuité forte).

Définition 3.1.6. Soit $u_n \in H$ une suite bornée. On dit que u_n admet une *décomposition en profils* avec les *profils* $U^{(j)} \in H$, les *déplacements* $g_n^{(j)} \in G$ et les *restes* $w_n^{(J)}$ si les suites $g_n^{(j)}$ et $g_n^{(k)}$ sont orthogonales pour $j \neq k$,

$$u_n = \sum_{j=1}^{J} g_n^{(j)} U^{(j)} + w_n^{(J)}, \qquad \lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|w_n^{(J)}\|_G = 0. \tag{3.1.1}$$

Proposition 3.1.7. *Si u_n une suite bornée qui admet une décomposition en profils $U^{(j)}$ avec les restes $w_n^{(J)}$, alors pour tout j la suite $\left(g_n^{(j)}\right)^{-1} u_n$ converge faiblement vers $U^{(j)}$ et pour tout $J \in \{1, 2, \ldots\}$ on a* l'expansion de Pythagore

$$\|u_n\|_H^2 = \sum_{j=1}^{J} \|U^{(j)}\|_H^2 + \|w_n^{(J)}\|_H^2 + o(1), \qquad quand\ n \to \infty. \tag{3.1.2}$$

Démonstration. Par l'hypothèse u_n est une suite bornée, donc pour montrer la première partie il suffit de vérifier que pour tout j on a $\lim_{n\to\infty} \big\|\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}u_n - U^{(j)}\big\|_W = 0$. Fixons j et soit $\varepsilon > 0$. On trouve d'abord $J \geq j$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \big\|\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}w_n^{(J)}\big\|_W \leq \limsup_{n\to\infty} \big\|w_n^{(J)}\big\|_G \leq \varepsilon.$$

Ensuite, pour $k \in \{1, 2, \ldots, J\} \setminus \{j\}$ on a $\lim_{n\to\infty} \big\|\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}g_n^{(k)}U^{(k)}\big\|_W = 0$, donc (3.1.1) implique

$$\limsup_{n\to\infty} \big\|\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}u_n - U^{(j)}\big\|_W \leq \epsilon.$$

Pour montrer (3.1.2), on fixe J, on prend $j \in \{1, \ldots, J\}$, on applique $\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}$ à (3.1.1) et on prend la limite faible quand $n \to \infty$. D'après ce que l'on vient de montrer, on obtient que le membre de gauche ainsi que le membre de droite convergent vers le même élément $U^{(j)}$, ce qui implique que $\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}w_n^{(J)}$ converge faiblement vers 0, en particulier

$$\lim_{n\to\infty} \langle g_n^{(j)}U^{(j)}, w_n^{(J)}\rangle = 0, \qquad \text{pour tout } j \in \{1, \ldots, J\}.$$

On a aussi $\langle g_n^{(j)}U^{(j)}, g_n^{(k)}U^{(k)}\rangle = \big\langle \big(g_n^{(k)}\big)^{-1}g_n^{(j)}U^{(j)}, U^{(k)}\big\rangle \to 0$, donc en prenant $\|\cdot\|_H^2$ de (3.1.1) on obtient (3.1.2). □

Théorème 3.1.8 (Schindler et Tintarev)**.** *Pour toute suite bornée $u_n \in H$ possède une sous-suite qui admet une décomposition en profils. Si $\|u_n\|_G \to 0$, alors sa seule décomposition en profils est la décomposition triviale $U^{(j)} = 0$ pour tout j.*

Démonstration. Pour montrer la première partie, on construit un par un les profils $U^{(j)}$. On pose $w_n^{(0)} := u_n$. Supposons que les suites $w_n^{(0)}, \ldots, w_n^{(J-1)}$, les déplacements $g_n^{(1)}, \ldots, g_n^{(J-1)}$ et les profils $U^{(1)}, \ldots, U^{(J-1)}$ sont définis, en respectant les conditions suivantes :

— les suites $g_n^{(1)}, \ldots, g_n^{(J-1)}$ sont orthogonales,

— $\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}w_n^{(J-1)} \rightharpoonup 0$ pour $j = 1, \ldots, J-1$,

— $\|U^{(j)}\|_H \geq \limsup_{n\to\infty} \|w_n^{(j-1)}\|_G$ pour $j = 1, \ldots, J-1$.

On va trouver $g_n^{(J)}$ et $U^{(J)}$, et la suite $w_n^{(J)}$ sera définie par la relation

$$w_n^{(J-1)} = g_n^{(J)}U^{(J)} + w_n^{(J)}.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \|w_n^{(J-1)}\|_G = 0$, alors on pose $U^{(J)} = U^{(J+1)} = \ldots = 0$ et la preuve est terminée.

Dans le cas contraire, par le Lemme 3.1.4, après éventuellement l'extraction d'une sous-suite, il existe une suite $g_n^{(J)} \in G$ et $U^{(J)} \in H$ tels que

$$\big(g_n^{(J)}\big)^{-1}w_n^{(J-1)} \rightharpoonup U^{(J)}, \qquad \|U^{(J)}\|_H \geq \limsup_{n\to\infty} \|w_n^{(J-1)}\|_G > 0. \tag{3.1.3}$$

Supposons que $g_n^{(J)}$ n'est pas orthogonale à $g_n^{(j)}$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, J-1\}$. Après l'extraction d'une sous-suite on aura donc $\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}g_n^{(J)} \to g \in G$. Si $\phi \in H$, alors $\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}g_n^{(J)}\phi \to g\phi$ (par l'hypothèse de la continuité forte), $\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}w_n^{(J-1)} \rightharpoonup 0$ et $\big(g_n^{(j)}\big)^{-1}g_n^{(J)}U^{(J)} \to gU^{(J)}$, donc

$$\big\langle \big(g_n^{(j)}\big)^{-1}g_n^{(J)}\phi, \big(g_n^{(j)}\big)^{-1}w_n^{(J-1)} - \big(g_n^{(j)}\big)^{-1}g_n^{(J)}U^{(J)}\big\rangle \to \langle g\phi, gU^{(J)}\rangle = \langle \phi, U^{(J)}\rangle.$$

D'un autre côté,

$$\left\langle \left(g_n^{(j)}\right)^{-1} g_n^{(J)}\phi, \left(g_n^{(j)}\right)^{-1} w_n^{(J-1)} - \left(g_n^{(j)}\right)^{-1} g_n^{(J)} U^{(J)} \right\rangle = \left\langle \phi, \left(g_n^{(J)}\right)^{-1} w_n^{(J-1)} - U^{(J)} \right\rangle \to 0.$$

C'est impossible car $U^{(J)} \neq 0$, ce qui démontre l'orthogonalité.

On voit qu'il y a pour tout J l'expansion de Pythagore (3.1.2), en particulier $\lim_{J\to\infty} \|U^{(J)}\|_H = 0$, donc (3.1.3) implique $\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|w_n^{(J)}\|_G = 0$.

Le deuxième point est une conséquence de la première conclusion de la Proposition 3.1.7. □

Proposition 3.1.9. *La convergence faible avec concentration est caracterisée par le théorème précédent, c'est à dire est l'unique topologie pour laquelle le théorème est vrai.*

Démonstration. Exercice (on ne s'en servira pas par la suite). □

3.2 Description de la topologie

Pour utiliser le théorème que l'on vient de démontrer, il est nécessaire d'avoir, dans chaque cas précis, une description de la topologie de convergence avec concentration en termes de normes de Lebesgue, Sobolev, Besov etc. Voici l'exemple le plus simple d'une telle description.

Proposition 3.2.1. *Soit $H := H^1(\mathbb{R})$ et $G := \mathbb{R}$ agissant par les translations : $T_x f := f(\cdot - x)$. Alors, si u_n est une suite bornée,*

$$\|u_n\|_G \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|u_n\|_{L^\infty} \to 0.$$

Remarque 3.2.2. Les deux normes sont invariantes par translations, ce qui est de bon augure.

Démonstration. Si $\|u_n\|_{L^\infty} \to 0$, alors pour toute suite x_n on obtient $\|T_{x_n} u_n\|_{L^\infty} = \|u_n\|_{L^\infty} \to 0$, donc $T_{x_n} u_n \rightharpoonup 0$.

Inversement, supposons que u_n est une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R})$ et que pour toute suite réelle x_n on a $T_{x_n} u_n \rightharpoonup 0$. En particulier, soit $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n(-x_n)| \geq \frac{1}{2}\|u_n\|_{L^\infty}$, autrement dit

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq 2|v_n(0)|, \qquad \text{où } v_n := T_{x_n} u_n.$$

Comme $v_n \rightharpoonup 0$, le théorème de Rellich implique $|v_n(0)| \to 0$, donc $\|u_n\|_{L^\infty} \to 0$. □

Remarquons que cette action vérifie les hypothèse de continuité et d'évanescence des coefficients matriciels.

On revient au cadre du chapitre précédent.

Proposition 3.2.3. *Soit $G =]0, \infty[$ le groupe de multiplication agissant sur $\mathcal{H}$ (cf. chapitre précédent) par changement d'échelle, c'est à dire*

$$(T_\lambda u)(r) := u_\lambda(r) = u(r/\lambda), \qquad \textit{pour tout } \lambda \in]0, \infty[,\ u \in \mathcal{H}.$$

Alors, si u_n est une suite bornée,

$$\|u_n\|_G \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|u_n\|_{L^\infty} \to 0.$$

Démonstration. On est ramené au résultat précédent par le changement de variable $r^k = \mathrm{e}^x$, ce qui définit une isométrie $\mathcal{H} \simeq H^1(\mathbb{R})$, comme nous l'avions vu. Il est facile de vérifier que le changement d'échelle par un coefficient λ correspond, par ce changement de variable, à la translation par $y = k \log r$. □

Observons que cette action de groupe, étant isomorphe à l'action de l'exemple précédent, vérifie également les hypothèses de continuité forte et d'évanescence des coefficients matriciels.

Si $(u_0, \dot{u}_0) \in \mathcal{E}$ et $\lambda > 0$, on écrira

$$(u_0, \dot{u}_0)_\lambda := r \mapsto (u_0(\lambda^{-1}r), \lambda^{-1}\dot{u}_0(\lambda^{-1}r)).$$

On voit que $E((u_0, \dot{u}_0)_\lambda) = E((u_0, \dot{u}_0))$ et $\|(u_0, \dot{u}_0)_\lambda\|_\mathcal{E} = \|(u_0, \dot{u}_0)\|_\mathcal{E}$.

On considère le groupe (non-commutatif) $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ agissant sur $\mathcal{E}$ par

$$T_{(t,\lambda)}(u_0, \dot{u}_0) := S(-t)\big((u_0, \dot{u}_0)_\lambda\big) = r \mapsto (u_L(-\lambda^{-1}t, \lambda^{-1}r), \lambda^{-1}\partial_t u_L(-\lambda^{-1}t, \lambda^{-1}r)),$$

où $u_L(t) = S(t)(u_0, \dot{u}_0)$.

Remarque 3.2.4. Il est facile de vérifier que la loi de groupe est donnée par

$$(t_2, \lambda_2) \cdot (t_1, \lambda_1) = (t_2 + \lambda_2 t_1, \lambda_2\lambda_1),$$

donc

$$(t_2, \lambda_2)^{-1} \cdot (t_1, \lambda_1) = (-t_2/\lambda_2 + t_1/\lambda_2, \lambda_1/\lambda_2),$$

ce qui signifie que deux suite $g_n = (t_n, \lambda_n)$ et $\widetilde{g}_n = (\widetilde{t}_n, \widetilde{\lambda}_n)$ sont orthogonales si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\widetilde{\lambda}_n} + \frac{\widetilde{\lambda}_n}{\lambda_n} + \frac{|t_n - \widetilde{t}_n|}{\lambda_n} = \infty.$$

Proposition 3.2.5. *Si $(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n}) \in \mathcal{E}$ est une suite bornée, alors*

$$\|(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})\|_G \to 0 \ \Leftrightarrow\ \|u_{L,n}\|_{L^\infty L^\infty} \to 0 \ \Leftrightarrow\ \|u_{L,n}\|_S \to 0.$$

Démonstration. La deuxième condition implique la troisième par le Lemme 2.2.4.

Supposons que $\|S(t)(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})\|_S \to 0$. Cela implique que pour toute suite (t_n, λ_n) on a

$$\big\|S(t)\big(T_{(t_n,\lambda_n)}(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})\big)\big\|_S \to 0$$

(puisque la norme S est invariante par changement d'échelle et par le flot linéaire). En particulier, $T_{(t_n,\lambda_n)}(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n}) \rightharpoonup 0$ (en effet, la fonction $(v_0, \dot{v}_0) \mapsto \|S(t)(v_0, \dot{v}_0)\|_S$ est continue et convexe).

Supposons enfin que $\|(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})\|_G \to 0$. Soit t_n une suite telle que

$$\|S(t)(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})\|_{L^\infty L^\infty} \leq 2\|S(t_n)(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})\|_{L^\infty}. \tag{3.2.1}$$

Posons $(v_n, \dot{v}_n) := S(t_n)(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})$. On a $(v_n, \dot{v}_n)_{\lambda_n} \rightharpoonup 0$ pour toute suite $\lambda_n \in]0, \infty[$. Par conséquent, Proposition 3.2.3 implique $\|v_n\|_{L^\infty} \to 0$, donc (3.2.1) donne $\|S(t)(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})\|_{L^\infty L^\infty} \to 0$. □

Remarque 3.2.6. Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|(u_0, \dot{u}_0)\|_\mathcal{E} \leq 1$ et $\|(u_0, \dot{u}_0)\|_G \leq \delta$ implique $\|u_{L,n}\|_S \leq \epsilon$, et réciproquement $\|(u_0, \dot{u}_0)\|_\mathcal{E} \leq 1$ et $\|u_{L,n}\|_S \leq \delta$ implique $\|(u_0, \dot{u}_0)\|_G \leq \epsilon$.

En combinant le Théorème 3.1.8 avec la Proposition 3.2.5 on a le résultat suivant.

Proposition 3.2.7. *Soit $(u_{0,n}, \dot u_{0,n}) \in \mathcal{E}$ une suite bornée. Alors, après éventuellement extraction d'une sous-suite,*

$$(u_{0,n}, \dot u_{0,n}) = \sum_{j=1}^{J} \big(S(-t_{j,n}/\lambda_{j,n})(U^{(j)}, \dot U^{(j)})\big)_{\lambda_{j,n}} + (w_n^{(J)}, \dot w_n^{(J)}),$$

avec

$$\lim_{J\to\infty} \|S(t)(w_n^{(J)}, \dot w_n^{(J)})\|_S = 0.$$

Démonstration. Il faut vérifier les hypothèse du Théorème 3.1.8. La continuité forte est immédiate. Pour montrer l'évanescence des coefficients matriciels, prenons $(u_0, \dot u_0) \in \mathcal{E}$ et une suite $(t_n, \lambda_n) \to \infty$. Il suffit de montrer que toute sous-suite de $T_{(t_n,\lambda_n)}(u_0, \dot u_0)$ a une sous-suite qui converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{E}$. On considère trois cas.
Cas 1 : $t_n/\lambda_n \to -\infty$. Soit $(v_n, \dot v_n) := T_{(t_n,\lambda_n)}(u_0, \dot u_0)$. On voit que $\|S(t)(v_n, \dot v_n)\|_{S([0,\infty[)} \to 0$, ce qui implique $(v_n, \dot v_n) \rightharpoonup 0$ par la propriété de Fatou. (La fonctionnelle $(v, \dot v) \mapsto \|S(t)(v_n, \dot v_n)\|_{S([0,\infty[)}$ est continue $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$, convexe et s'annule uniquement en $v = 0$).
Cas 2 : $t_n/\lambda_n \to \infty$. Soit $(v_n, \dot v_n) := T_{(t_n,\lambda_n)}(u_0, \dot u_0)$. On voit que $\|S(t)(v_n, \dot v_n)\|_{S(]-\infty,0])} \to 0$, ce qui implique $(v_n, \dot v_n) \rightharpoonup 0$.
Cas 3 : t_n/λ_n borné, $|\log \lambda_n| \to \infty$. Alors $\{(u_{\mathrm{L}}(-t_n/\lambda_n), \partial_t u_{\mathrm{L}}(-t_n/\lambda_n))\}$ est un ensemble compact dans $\mathcal{E}$, donc l'évanescence des coefficients matriciels pour le changement d'échelle implique

$$T_{(t_n,\lambda_n)}(u_0, \dot u_0) = (u_{\mathrm{L}}(-t_n/\lambda_n), \partial_t u_{\mathrm{L}}(-t_n/\lambda_n))_{\lambda_n} \rightharpoonup 0.$$

(On a vérifié l'évanescence des coefficients matriciels pour le changement d'échelle dans $\mathcal{H}$; c'est vrai aussi dans L^2 aussi, comme on peut le vérifier soit directement, soit en se ramenant au groupe des translations par le changement de variable $r^k = \mathrm{e}^x$.) □

Remarque 3.2.8. En particulier cette preuve montre que pour tout $(u_0, \dot u_0) \in \mathcal{E}$ on a

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|S(t)(u_0, \dot u_0)\|_{L^\infty} = 0.$$

En extrayant encore une fois une sous-suite on peut supposer que pour tout j, on ait l'un des cas suivants :

$$\begin{aligned} &t_{j,n} = 0,\ \forall n && \textit{onde centrée}, \\ &\frac{t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \to \infty && \textit{onde entrante}, \\ &\frac{t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \to -\infty && \textit{onde sortante}. \end{aligned}$$

Cette dénomination est intuitive si on pense à $(u_{0,n}, \dot u_{0,n})$ comme une suite de données initiales que l'on fait évoluer par $S(t)$.

3.3 Décomposition en profils non linéaires

La décomposition en profils linéaires est essentiellement un outil du calcul des variations. On s'intéressera maintenant aux questions de *propagation* par le flot non linéaire. Il n'y a pas de théorie générale pour ce type de questions, mais pour l'équation (1.2.2) on peut trouver des résultats satisfaisants.

Soit $(u_{0,n}, \dot u_{0,n})$ une suite de données initiales ayant une décomposition en profils donnée par la Proposition 3.2.7. À chaque profil $(U^{(j)}, \dot U^{(j)})$ on associe le *profil non linéaire* correspondant $V^{(j)} = V^{(j)}(t,r)$, qui est la solution de l'équation (1.2.2) qui vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \|(V^{(j)}(-t_{j,n}/\lambda_{j,n}), \partial_t V^{(j)}(-t_{j,n}/\lambda_{j,n})) - S(-t_{j,n}/\lambda_{j,n})(U^{(j)}, \dot U^{(j)})\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

L'existence et l'unicité de $V^{(j)}$ résulte du Lemme 2.2.6 et de la Remarque 2.2.8.

On va écrire

$$V_n^{(j)}(t) := V^{(j)}((t - t_{j,n})/\lambda_{j,n})_{\lambda_{j,n}}, \qquad U_n^{(j)}(t) := \big(S((t{-}t_{j,n})/\lambda_{j,n})(U^{(j)}, \dot U^{(j)})\big)_{\lambda_{j,n}}.$$

Il est utile de remarquer que pour j suffisamment grand $\|(U^{(j)}, \dot U^{(j)})\|_{\mathcal{E}}$ est petit, donc le Lemme 2.2.6 implique en particulier que pour j grand $V^{(j)}$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}} &\|(V_n^{(j)}(t), \partial_t V_n^{(j)}(t)) - (U_n^{(j)}(t), \partial_t U_n^{(j)}(t))\|_{\mathcal{E}} \\ &+\|(V_n^{(j)}(t), \partial_t V_n^{(j)}(t)) - (U_n^{(j)}(t), \partial_t U_n^{(j)}(t))\|_{S} \\ &\lesssim \|(U^{(j)}, \dot U^{(j)})\|_{\mathcal{E}}^3 \lesssim \|(U^{(j)}, \dot U^{(j)})\|_{\mathcal{E}}^2.\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Lemme 3.3.1. *Soit $(u_{0,n}, \dot u_{0,n})$ une suite qui admet une décomposition en profils et supposons que pour tout j le profil non linéaire $V^{(j)}$ est défini pour tout temps et $\|V^{(j)}\|_S < \infty$. Alors pour n suffisamment grand la solution de (1.2.2) pour la donnée initiale $(u_{0,n}, \dot u_{0,n})$ existe pour tout temps et se disperse.*

Démonstration. L'idée est de considérer une solution approchée

$$v_n^{(J)}(t) := \sum_{j=1}^J V_n^{(j)}(t) + S(t)(w_n^{(J)}, \dot w_n^{(J)})$$

et montrer que pour J suffisamment grand il est possible d'utiliser le Lemme 2.2.9.

La fonction $v_n^{(J)}(t)$ résout l'équation

$$\begin{aligned}&\partial_t^2 v_n - \partial_r^2 v_n - r^{-1}\partial_r v_n + \frac{k^2}{2r^2}\sin(2v_n) = h_n := \\ &\frac{k^2}{2r^2}\sin\bigg(2\bigg(\sum_{j=1}^J V_n^{(j)}(t) + S(t)(w_n^{(J)}, \dot w_n^{(J)})\bigg)\bigg) \\ &\quad - \frac{k^2}{2r^2}\sum_{j=1}^J \sin\big(2V_n^{(j)}(t)\big) - \frac{k^2}{r^2}S(t)(w_n^{(J)}, \dot w_n^{(J)}).\end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer le Lemme 2.2.9, il faut vérifier que

— $\limsup_n \|(v_n^{(J)}, \partial_t v_n^{(J)})\|_{L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{E})} + \|v_n^{(J)}\|_{S(\mathbb{R})}$ est borné uniformément en J,

— $\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|h_n\|_{L^1L^2} = 0$.

Le premier point découle de (3.3.1). En effet, par l'expansion de Pythagore (3.1.2) on obtient

$$\sup_J \limsup_n \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big\| \sum_{j=1}^J V_n^{(j)}(t) - \sum_{j=1}^J U_n^{(j)}(t) \Big\|_{\mathcal{E}} + \Big\| \sum_{j=1}^J V_n^{(j)}(t) - \sum_{j=1}^J U_n^{(j)}(t) \Big\|_S \right) < \infty,$$

mais

$$\begin{aligned}\sup_J \limsup_n \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big\| \sum_{j=1}^J U_n^{(j)}(t) \Big\|_{\mathcal{E}} + \Big\| \sum_{j=1}^J U_n^{(j)}(t) \Big\|_S \right) &\lesssim \sup_J \limsup_n \Big\| \sum_{j=1}^J \big(U_n^{(j)}(0), \partial_t U_n^{(j)}(0)\big) \Big\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \sup_J \limsup_n \big(\|(u_{n,0}, \dot u_{n,0})\|_{\mathcal{E}} + \|(w_n^{(J)}, \dot w_n^{(J)})\|_{\mathcal{E}} \big) < \infty.\end{aligned}$$

Pour montrer le deuxième point, en utilisant l'inégalité

$$\big| \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha) - \beta \big| \lesssim \alpha^2\beta + \beta^3$$

avec $\alpha = 2\sum_{j=1}^J V_n^{(j)}(t)$ et $\beta = 2S(t)(w_n^{(J)}, \dot w_n^{(J)})$, on voit qu'il suffit de vérifier que pour J fixe

$$\limsup_n \left\| \frac{1}{r^2} \sin\left(2\sum_{j=1}^J V_n^{(j)}(t) \right) - \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^J \sin\big(2V_n^{(j)}(t)\big) \right\|_{L^1L^2} = 0.$$

On oublie que $V^{(j)}$ est solution de (1.2.2) et on montre cette convergence pour toute suite de fonctions $V^{(1)}, \ldots, V^{(J)} \in S$ (c'est une astuce de Bahouri et Gérard). Par densité, on peut supposer $V^{(j)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$. Mais à ce moment-là, pour n grand les supports (en espace-temps) des fonctions $V_n^{(j)}$ pour $j = 1, \ldots, J$ sont disjoints. $\square$

Parfois on n'a pas envie de supposer que tous les profils sont définis globalement et se dispersent. La situation devient alors un peu plus compliquée. On va considérer la propagation pour les temps positifs, ce qui ne restreint pas la généralité grâce à la réversibilité temporelle du flot.

Définition 3.3.2. Soit u une solution de (1.2.2). On dira qu'une suite de temps T_n est *régulière* pour la solution u s'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $T_n \in I$ pour tout n et $\|u\|_{S(I)} < \infty$. On dira qu'une suite d'intervalle $[a_n, b_n]$ est régulière si toute suite $T_n \in [a_n, b_n]$ est régulière.

Lemme 3.3.3. *Soit u une solution de* (1.2.2), $(t_n, \lambda_n) \to \infty$ *et τ_n une suite bornée telle que la suite $T_n := \frac{\tau_n - t_n}{\lambda_n}$ est régulière. Alors $(u(T_n), \partial_t u(T_n))_{\lambda_n} \rightharpoonup 0$.*

Démonstration. En extrayant une sous-suite, on peut supposer que les limites $\lim_{n\to\infty} \log\lambda_n \in [-\infty, \infty]$ et $\lim_{n\to\infty} T_n \in [-\infty, \infty]$ existent. Si $\lambda_n \to 0$ ou $\lambda_n \to \infty$, alors on obtient la conclusion en considérant séparément les trois cas $T_n \to -\infty$, $T_n \to \infty$ ou $T_n \to T \in \mathbb{R}$.

Si $\log\lambda_n$ est bornée, alors $|t_n| \to \infty$, ce qui implique $|T_n| \to \infty$, car τ_n et bornée, on obtient donc également $(u(T_n), \partial_t u(T_n))_{\lambda_n} \rightharpoonup 0$. $\square$

Lemme 3.3.4. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, u une solution de (1.2.2), $(t_n, \lambda_n) \to \infty$, $u_n(t,r) := u((t-t_n)/\lambda_n, r/\lambda_n)$ et I_n une suite d'intervalles telle que la suite $(I_n - t_n)/\lambda_n$ est régulière pour u. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_n} \int_0^\infty (\partial_t u_n) f \, r\mathrm{d}r \, \mathrm{d}t = 0.$$

Démonstration. On intègre par parties en t. Les termes de bord convergent vers 0 d'après le lemme précédent. □

Proposition 3.3.5. *Soit $(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})$ une suite dans $\mathcal{E}$ qui admet une décomposition en profils et soit T_n une suite telle que pour tout j la suite $(T_n - t_{j,n})/\lambda_{j,n}$ est régulière pour $V^{(j)}$. Soit u_n la solution de (1.2.2) pour la donnée initiale $(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})$ et soit*

$$v_n^{(J)}(t) := \sum_{j=1}^J V_n^{(j)}(t) + S(t)(w_n^{(J)}, \dot{w}_n^{(J)}).$$

Alors pour n suffisamment grand u_n est définie pour $t \in I_n := [0, T_n[$ et

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \big(\|(u_n, \partial_t u_n) - (v_n^{(J)}, \partial_t v_n^{(J)})\|_{L^\infty(I_n;\mathcal{E})} + \|u_n - v_n^{(J)}\|_{S(I_n)}\big) = 0.$$

De plus, on a l'expansion de Pythagore

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T_n[} \Big| \|(u_n(t), \partial_t u_n(t))\|_{\mathcal{E}}^2 - \sum_{j=1}^J \|(V_n^{(j)}(t), \partial_t V_n^{(j)}(t))\|_{\mathcal{E}}^2 - \|S(t)(w_n^{(J)}, \dot{w}_n^{(J)})\|_{\mathcal{E}}^2 \Big| = 0. \tag{3.3.2}$$

Démonstration. Pour la première partie, l'argument est le même que pour le Lemme 3.3.1, mais à la fin on approche les profils $V^{(j)}$ par des fonctions dont les supports sont des sous-ensembles compacts de $I^{(j)} \times]0,\infty[$.

Pour montrer la deuxième partie, il suffit d'estimer $\|(v_n^{(J)}(t), \partial_t v_n^{(J)}(t))\|_{\mathcal{E}}^2$ puis utiliser la première partie. On calcule les dérivées en temps des termes croisés. On écrit $w_n^{(J)}(t) := S(t)(w_n^{(J)}, \dot{w}_n^{(J)})$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\langle \partial_t V_n^{(j)}, \partial_t S(t)(w_n^{(J)}, \dot{w}_n^{(J)})\rangle + \langle V_n^{(j)}, L_k S(t)(w_n^{(J)}, \dot{w}_n^{(J)})\rangle\big) = \langle Z(V_n^{(j)})(V_n^{(j)})^3/(r^2), \partial_t w_n^{(J)}\rangle.$$

Il faut donc montrer que pour tout $s_n \in [0, T_n[$

$$\int_0^{s_n} \langle Z(V_n^{(j)})(V_n^{(j)})^3/(r^2), \partial_t w_n^{(J)}\rangle \, \mathrm{d}t \to 0.$$

Pour cela, on intègre par parties en temps et on obtient :

$$-\int_0^{s_n} \big\langle \partial_t\big(Z(V_n^{(j)})(V_n^{(j)})^3/(r^2)\big), w_n^{(J)}\big\rangle + \text{les termes de bord}.$$

La première intégrale est petite en utilisant $V^{(j)} \in S$, $\partial_t V^{(j)} \in L^\infty L^2$ et $\|w_n^{(J)}\|_S \ll 1$. Les termes de bords sont petits grâce au fait que $(V^{(j)})^3/r^2 \in L^\infty L^1$ et $\|w_n^{(J)}\|_{L^\infty L^\infty} \ll 1$.

Concernant les termes croisés $\langle Z(V_n^{(j)})(V_n^{(j)})^3/(r^2), \partial_t V_n^{(k)}\rangle$, le Lemme 3.3.4 montre qu'ils convergent vers 0 quand $n \to \infty$. □

Remarque 3.3.6. Thomas Duyckaerts m'a indiqué qu'il existait une méthode plus rapide de démontrer (3.3.2), notamment on peut montrer que si la suite $(T_n - t_n^{(j)})/\lambda_n^{(j)}$ est régulière pour $V^{(j)}$ pour tout j, alors on peut construire une décomposition *linéaire* de la suite $(u_n(T_n), \partial_t u_n(T_n))$ (où les nouveaux profils linéaires seront proches des profils non linéaires $(V_n^{(j)}, \partial_t V_n^{(j)})$ en norme $\mathcal{E}$), et conclure en utilisant l'expansion de Pythagore linéaire.

Pour finir ce chapitre, nous donnons une autre application, elle aussi considérée dans l'article de Bahouri et Gérard, notamment la continuité faible du flot dans l'espace d'énergie. On a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.7. *Soit $V^{(j)}$ un profil non linéaire dont la norme est petite et supposons que la suite $(t_n^{(j)}, \lambda_n^{(j)})$ soit orthogonale à la suite constante $(0, 1)$. Alors $(V_n^{(j)}(t), \partial_t V_n^{(j)}(t)) \rightharpoonup 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Sans perdre la généralité on peut supposer que $\frac{t - t_n^{(j)}}{\lambda_n^{(j)}} \to t_0 \in [-\infty, \infty]$, et on traite séparément les trois cas, en remarquant que la suite $(t_n^{(j)} - t, \lambda_n^{(j)})$ est orthogonale à $(0, 1)$. □

Proposition 3.3.8. *Il existe $\eta > 0$ tel que ce qui suit est vrai. Soit $u : [0, T] \to \mathcal{E}$ une solution forte de (1.2.2), et $(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n}) \in \mathcal{E}$ une suite telle que $\|(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n}) - (u(0), \partial_t u(0))\|_{\mathcal{E}} \leq \eta$ pour tout n et $(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n}) \rightharpoonup (u(0), \partial_t u(0))$. Alors pour n grand la solution u_n de (1.2.2) existe pour $t \in [0, T]$ et*

$$(u_n(t), \partial_t u_n(t)) \rightharpoonup (u(t), \partial_t u(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in [0, T].$$

Démonstration. Une sous suite de la suite $(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})$ admet une décomposition en profils. Le premier profil, qui correspond au déplacement trivial $(0, 1)$, est $(u(0), \partial_t u(0))$, et tous les autres sont petits. Par un argument similaire à celui que l'on a utilisé dans la preuve du Lemme 3.3.1, le lemme précédent donne la conclusion. □

Il y a d'autres variations sur ce thème "tous les profils (éventuellement sauf un seul) se dispersent".

Exercice 3.3.9. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que ce qui suit est vrai. Soit u une solution de (1.2.2) qui explose en temps $T_+ < \infty$. Alors pour tout ensemble compact $K \subset \mathcal{E}$ il existe $T_K < T_+$ tel que

$$(u(t), \partial_t u(t)) \notin K, \qquad \text{pour tout } t \in [T_K, T_+[.$$

(C'est une amélioration du principe général voulant qu'une solution qui cesse d'exister doit avant cela quitter tout ensemble compact.)

Chapitre 4

Théorème du seuil

Le but de ce chapitre est de démontrer le Théorème 1, ce qui constitue une partie de l'article [2].

Théorème 4.0.1. *Soit* $u : [0, T_+[\to \mathcal{E}$ *une solution de* (1.2.2) *et supposons que*

$$\sup_{t \in [0,T_+[} \|(u(t), \partial_t u(u))\|_{\mathcal{E}} < \infty.$$

Alors $T_+ = \infty$ *et* $u(t)$ *se disperse quand* $t \to \infty$.

4.1 Concentration-compacité

La preuve procède par contradiction. Définissons *l'énergie critique* E^* comme le supremum des nombres $E > 0$ ayant la propriété suivante : si u est une solution de (1.2.2) telle que

$$\sup_{t \in [0,T_+[} \|(u(t), \partial_t u(u))\|_{\mathcal{E}} \leq E,$$

alors $T_+ = \infty$ et u se disperse. Par la théorie de Cauchy on sait que $E^* > 0$, et on suppose par contradiction que $E^* < \infty$.

Lemme 4.1.1. *Il existe une solution* $(u_c, \partial_t u_c) : [0, T_+[\to \mathcal{E}$ *telle que* $\sup_{t \in [0,T_+[} \|(u_c(t), \partial_t u_c(t))\|_{\mathcal{E}} = E^*$ *et* $(u_c, \partial_t u_c)$ *ne se disperse pas quand* $t \to T_+$.

Démonstration. Soit $(u_n, \partial_t u_n)$ une suite de solutions de (1.2.2) telle que

$$\sup_{t \in [0,T_+[} \|(u_n(t), \partial_t u_n(t))\|_{\mathcal{E}} \leq E^* + \frac{1}{n},$$

et qui ne se dispersent pas pour les temps positifs. On décompose en profils (une sous-suite de) la suite $(u_n(0), \partial_t u_n(0))$. D'après ce que l'on a vu au chapitre précédent, au moins un parmi les profils non linéaires correspondants ne se disperse pas pour les temps positifs. Sans perdre la généralité, soit $V^{(1)}, \ldots, V^{(K)}$ les profils qui ne se dispersent pas. Remarquons que ce peuvent être des ondes centrées ou entrantes. Pour $\epsilon > 0$ fixe, pour $j = 1, \ldots, K$, si $V_n^{(j)}$ est une onde centrée, alors soit $T^{(j)} > 0$ tel que

$$\|(V^{(j)}(T^{(j)}), \dot{V}^{(j)}(T^{(j)}))\|_{\mathcal{E}} > E^*,$$

et si $V_n^{(j)}$ est une onde entrante, $T^{(j)} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|(V^{(j)}(T^{(j)}), \dot{V}^{(j)}(T^{(j)}))\|_{\mathcal{E}} > E^*.$$

Si un tel $T^{(j)}$ n'existe pas, alors la preuve est finie.

Pour tout n on pose

$$t_n := \min_{j=1,\dots,K} \{\lambda_n^{(j)} T^{(j)} + t_n^{(j)}\},$$

et on voit que $t_n > 0$ si n est grand.

Vérifions à présent que la suite t_n est admissible. Pour les profils centrés et entrants c'est clair. Pour les profils sortants aussi, puisque $t_n \geq 0$.

L'expansion de Pythagore (3.3.2) donne alors une contradiction. □

Souvent on appelle u_c l'*élément critique.*

Définition 4.1.2. On dit qu'une solution $(u, \partial_t u) : [0, T_+[\to \mathcal{E}$ a la *propriété de compacité* (pour les temps positifs) s'il existe une fonction continue $\lambda : [0, T_+[\to]0, \infty[$ telle que l'ensemble

$$\{(u(t), \partial_t u(t))_{1/\lambda(t)}\} \subset \mathcal{E}$$

est précompact dans $\mathcal{E}$.

Lemme 4.1.3. *La solution u_c du Lemme 4.1.1 (plus précisément, toute solution qui vérifie les conditions énoncées dans ce Lemme) a la propriété de compacité pour les temps positifs.*

Démonstration. Soit $t_n \in [0, T_+[$ et $t_n \to T_+$. On va montrer qu'il existe une suite $\lambda_n \in]0, \infty[$ telle que l'ensemble

$$\{(u(t_n), \partial_t u(t_n))_{1/\lambda_n}\}$$

est précompact dans $\mathcal{E}$.

La suite $(u(t_n), \partial_t u(t_n))$ est bornée dans $\mathcal{E}$, à une sous-suite près elle admet donc une décomposition en profils. Le but est de montrer qu'il y a un seul profil non nul $V^{(1)}$, que $\|w_n^{(J)}\|_{\mathcal{E}} = \|w_n^{(1)}\|_{\mathcal{E}} \to 0$ quand $n \to \infty$ et que $V^{(1)}$ est une onde centrée.

En procédant de manière similaire que dans la preuve du Lemme 4.1.1, on montre qu'il y a un seul profil qui ne se disperse pas pour les temps positifs. Soit $V^{(1)}$ ce profil. Si c'est une onde centrée, soit $T^{(1)} > 0$ et

$$\|(V^{(1)}(T^{(1)}), \partial_t V^{(1)}(T^{(1)}))\|_{\mathcal{E}} \geq E^* - \epsilon,$$

et si c'est une onde entrante alors $T^{(1)} \in \mathbb{R}$ est tel que

$$\|(V^{(1)}(T^{(1)}), \partial_t V^{(1)}(T^{(1)}))\|_{\mathcal{E}} \geq E^* - \epsilon.$$

Alors la suite $T_n := \lambda_n^{(1)} T^{(1)} + t_n^{(1)}$ est admissible. En utilisant encore une fois (3.3.2) on obtient qu'il n'y a pas d'autres profils et l'erreur converge vers 0.

Clairement $V_n^{(1)}$ ne peut pas être une onde sortante. Si c'était une onde entrante, on obtiendrait $\lim_{n\to\infty} \|S(t)(u(t_n), \partial_t u(t_n))\|_{S([-t_n, 0])} = 0$, ce qui est impossible.

Il y a plusieurs façons de construire une fonction continue λ, par exemple on peut définir $\lambda(t)$ comme l'unique valeur telle que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r/\lambda(t)} \big((\partial_t u(t)) + (\partial_r u)^2 + r^{-2} u^2\big) r \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \int_0^\infty \big((\partial_t u(t)) + (\partial_r u)^2 + r^{-2} u^2\big) r \mathrm{d}r.$$

Alors il n'est pas difficile de démontrer que pour toute suite t_n la suite d'échelles λ_n construite si-dessus est équivalente à la suite $\lambda(t_n)$. □

4.2 Théorème de Liouville

La deuxième (et habituellement la plus difficile) partie du schéma de Kenig-Merle est de montrer que la seule solution ayant la propriété de compacité (et vérifiant éventuellement certaines contraintes d'énergie) est la solution identiquement nulle.

Proposition 4.2.1. *Soit* $(u, \partial_t u) : [0, T_+[\to \mathcal{E}$ *une solution de* (1.2.2) *telle que* $(u, \partial_t u)$ *a la propriété de compacité et telle que* $\sup_{t \in [0,T_+[} \|(u, \partial_t u)\|_{\mathcal{E}} < \infty$. *Alors* $u \equiv 0$.

Le point de départ pour démontrer ce résultat sera l'*identité de viriel*.

On fixe une fonction cut-off lisse $\chi \in C_0^\infty([0, \infty[)$ telle que

$$\chi(r) = 1 \text{ pour } r \leq 1, \quad \chi(r) = 0 \text{ pour } r \geq 3, \quad |\chi'(r)| \leq 1 \text{ pour tout } r \geq 0.$$

Pour tout $R > 0$ on définit

$$\chi_R(r) := \chi(r/R)$$

Lemme 4.2.2. *Soit* $(u, \partial_t u) : I \to \mathcal{E}$ *une solution de* (1.2.2). *Alors pour tout* $t \in I$ *et* $R > 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^\infty \chi_R \, \partial_t u \, r \partial_r u \, r \mathrm{d}r = -\int_0^\infty (\partial_t u)^2 \, r \mathrm{d}r + O(\mathcal{E}_R(u, \partial_t u)),$$

où

$$\mathcal{E}_R((u, \partial_t u)(t)) := \frac{1}{k} \int_R^\infty \Big((\partial_t u)^2 + (\partial_r u)^2 + k^2 \frac{\sin^2 u}{r^2} \Big) \, r \, \mathrm{d}r.$$

Démonstration. Calcul direct. □

Comme la "raison" pour laquelle il existe des identités de ce type, on évoque souvent l'invariance par changement d'échelle. On définit les *opérateurs de changement d'échelle* :

$$\begin{aligned}
\Lambda u &:= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=1} (u_\lambda) = r \partial_r u, \qquad \text{chmt d'échelle } \mathcal{H}\text{-critique}, \\
\Lambda_0 \dot{u} &:= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=1} (\dot{u}_\lambda / \lambda) = 1 + r \partial_r u, \qquad \text{chmt d'échelle } L^2\text{-critique}.
\end{aligned}$$

Pour les fonctions pour lesquelles tout est bien défini, on peut écrire

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=1} \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2} (\partial_r (u_\lambda))^2 + \frac{k^2}{2r^2} (\sin(u_\lambda))^2 \Big) \, r \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \Big(\partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u - \frac{k^2}{2r^2} \sin(2u) \Big) \Lambda u \, r \mathrm{d}r = \int_0^\infty \partial_t^2 u \Lambda u \, r \mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

et

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=1} \int_0^\infty \frac{1}{2} \Big(\frac{1}{\lambda} (\partial_t u)_\lambda \Big)^2 \, r \mathrm{d}r = \int_0^\infty (\partial_t u) \Lambda_0 (\partial_t u) \, r \mathrm{d}r = \|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \int_0^\infty \partial_t u \Lambda \partial_t u \, r \mathrm{d}r,$$

donc formellement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^\infty \partial_t u \, r \partial_r u \, r \mathrm{d}r = -\|\partial_t u\|_{L^2}^2.$$

Lemme 4.2.3. *Il existe une solution u ayant la propriété de compacité avec la fonction d'échelle $\lambda(t)$ bornée.*

Démonstration. Soit $(u_c, \partial_t u_c)$ une solution donnée par le Lemme 4.1.1 et soit $\lambda(t)$ la fonction d'échelle donnée par le Lemme 4.1.3. Supposons que λ est non-bornée (notons au passage que cela implique que u_c est définie pour tous les temps positifs) et soit t_n une suite telle que

$$\lambda(t_n) = \sup_{t\in[0,t_n]} \lambda(t).$$

Soit $(u(t_n), \partial_t u(t_n))_{1/\lambda(t_n)} \to (u_0, -\dot{u}_0)$, et soit $(u, \partial_t u) : [0, T_+[\to \mathcal{E}$ la solution de (1.2.2) pour la donnée initiale $(u_0, \dot{u}_0)$. On va montrer que cette solution a la propriété de compacité, avec la fonction d'échelle qui converge vers 0.

En effet, soit $(u_n, \partial_t u_n) : [0, t_n/\lambda(t_n)]$ la solution pour la donnée initiale $(u_c(t_n), -\partial_t u_c(t_n))_{1/\lambda(t_n)}$. Soit $T_+ := \liminf_n t_n/\lambda(t_n)$ et $t \in [0, T_+[$. (On ne sait pas encore que T_+ est le temps maximal d'existence de $(u(t), \partial_t u(t))$, mais il s'avérera que c'est le cas.) Alors tous les éléments

$$(u_n(t), \partial_t u_n(t))_{\lambda(t_n)/\lambda(t_n - t\lambda(t_n))}$$

appartiennent au même ensemble compact. Mais $(u_n(t), \partial_t u_n(t)) \to (u(t), \partial_t u(t))$, donc la suite $\lambda(t_n)/\lambda(t_n - t\lambda(t_n))$ est bornée et il existe $\mu(t)$ tel que $(u(t), \partial_t u(t))_{1/\mu(t)}$ appartient au même ensemble compact. On observe que $\mu(t)$ est un point d'adhérence de la suite $\lambda(t_n - t\lambda(t_n))/\lambda(t_n)$, donc $\mu(t) \leq 1$.

Supposons que $T_+ < \infty$. On va montrer qu'il existe une suite $s_n \to T_+$ telle que $\mu(s_n) \to 0$. Sinon, prenons une sous-suite telle que $t_n/\lambda(t_n) \to T_+$. La solution $(u, \partial_t u)$ peut être prolongée après T_+, donc l'ensemble $(u_n(t_n/\lambda(t_n)), \partial_t u_n(t_n/\lambda(t_n)))$ serait précompact, ce qui est impossible puisque $(u_n(t_n/\lambda(t_n)), \partial_t u_n(t_n/\lambda(t_n))) = (u_c(0), \partial_t u_c(0))_{1/\lambda(t_n)}$.

□

Démonstration de la Proposition 4.2.1. Sans restreindre la généralité on suppose que $\lambda(t) \in]0, 1]$. Considérons d'abord le cas $T_+ = \infty$. La précompacité implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $R = R(\epsilon) > 0$ tel que

$$\mathcal{E}_R((u(t), \partial_t u(t))) \leq \epsilon \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Alors, l'identité de viriel implique

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^\infty (\partial_t u)^2 \, r \, \mathrm{d}r = 0.$$

Cela implique (j'omets les détails) qu'il existe une suite de temps t_n telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(t_n)} \int_{t_n}^{t_n+\lambda(t_n)} \int_0^\infty (\partial_t u)^2 \, r \, \mathrm{d}r = 0. \tag{4.2.1}$$

Soit $(u(t_n), \partial_t u(t_n))_{1/\lambda(t_n)} \to (u_0, \dot{u}_0)$ et soit u la solution de (1.2.2) associée à cette donnée initiale. On a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^\infty (\partial_t u_n)^2 \, r \, \mathrm{d}r = 0.$$

Soit $T \in]0,1]$ tel que $(u, \partial_t u)$ existe sur $[0,T]$. Alors

$$\int_0^T (\partial_t u)^2 \, r \, \mathrm{d}r = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty (\partial_t u_n)^2 \, r \, \mathrm{d}r = 0,$$

donc u est une solution stationnaire dans $\mathcal{E}$, et la seule possibilité est $u \equiv 0$.

Considérons maintenant le cas $T_+ < \infty$. Alors, d'après le Théorème 4.3.1,

$$\lim_{t\to T_+} \frac{\lambda(t)}{T_+ - t} = 0.$$

On va montrer qu'il existe une suite t_n telle que (4.2.1) est vrai. La fin de l'argument est la même. Pour cela, on montre d'abord que

$$\lim_{T\to T_+} \frac{1}{T_+ - T} \int_T^{T_+} \int_0^\infty (\partial_t u)^2 \, r \, \mathrm{d}r = 0,$$

ce qui est une conséquence du Lemme 4.2.2 (j'omets les détails).

□

4.3 Pas d'énergie sur le cône de lumière

Théorème 4.3.1 (Shatah et Tahvildar-Zadeh)**.** *Soit* $(u, \partial_t u) : [0, T_+) \to \mathcal{E}$ *une solution (forte) de* (1.2.2)*. Alors pour tout* $\lambda > 0$

$$E^\lambda_{\mathrm{ext}}(t) := \pi \int_{\lambda(T_+ - t)}^{T_+ - t} \big((\partial_t u)^2 + (\partial_r u)^2 + r^{-2} \sin^2(2u)\big) r \, \mathrm{d}r \to 0 \quad \textit{quand } t \to T_+.$$

□

Ce résultat a été démontré pour des solutions lisses par Shatah et Tahvildar-Zadeh [8]. Pour une adaptation de la preuve au cas des solutions fortes dans $\mathcal{E}$, je proposerais de consulter [2, Appendice B].

Chapitre 5

Analyse des deux-bulles

5.1 Structure variationnelle

La solution stationnaire Q n'appartient pas à $\mathcal{E}$, il n'est donc pas surprenant que

$$\|Q_\lambda - Q_\mu\|_{\mathcal{E}} \to \infty, \qquad \text{quand } \lambda \ll \mu.$$

Aussi longtemps que $|u| \leq \pi - \epsilon$, $|\sin u| \simeq |u|$, donc $\|(u, \dot{u})\|_{\mathcal{E}}^2 \simeq E(u, \dot{u})$, mais ce n'est plus vrai pour les deux bulles, qui prennent des valeurs proches de $\pm\pi$.

Pour $(u_0, \dot{u}_0) \in \mathcal{E}$ on définit

$$\mathbf{d}_\pm(u_0, \dot{u}_0) := \inf_{\lambda,\mu>0} \big(\|(u_0 \mp (Q_\lambda - Q_\mu), \dot{u}_0)\|_{\mathcal{E}}^2 + (\lambda/\mu)^k\big).$$

Ces fonctionnelles mesurent la distance de $(u_0, \dot{u}_0)$ d'une deux-bulle (positive ou négative). On pose

$$\mathbf{d}(u_0, \dot{u}_0) := \min\{\mathbf{d}_+(u_0, \dot{u}_0), \mathbf{d}_-(u_0, \dot{u}_0)\}.$$

Lemme 5.1.1. *Pour tout $M > 0$ il existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(M)$ et $\epsilon_2 = \epsilon_2(M)$ tels que*

$$\mathbf{d}(u_0, \dot{u}_0) \leq \epsilon_1 \;\Rightarrow\; \|(u_0, \dot{u}_0)\|_{\mathcal{E}} \geq M,$$
$$E(u_0, \dot{u}_0) \leq 8k\pi \text{ et } \|(u_0, \dot{u}_0)\|_{\mathcal{E}} \geq M \;\Rightarrow\; \mathbf{d}(u_0, \dot{u}_0) \leq \epsilon_2.$$

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 5.1.2. *Théorème 1 est vrai dans le cas $E(u, \partial_t u) < 8k\pi$.*

Démonstration. Si $E(u, \partial_t u) < 8k\pi$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\mathbf{d}(u(t), \partial_t u(t)) \geq \eta$ pour tout $t \in]T_-, T_+[$, ce qui implique par le lemme précédent qu'il existe $M > 0$ tel que $\|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{E}} \geq M$ pour tout $t \in]T_-, T_+[$, donc le Théorème 4.0.1 implique que $(u(t), \partial_t u(t))$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ et se disperse aussi bien pour les temps positifs que pour les temps négatifs. □

Comme j'avais mentionné, il existe une approche alternative pour démontrer ce résultat, basée sur l'expansion de Pythagore de l'énergie non linéaire. Plus précisément on a le fait suivant.

Lemme 5.1.3. *Soit* $(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n})$ *une suite dans* $\mathcal{E}$ *qui admet une décomposition en profils. Soit* $(V^{(j)}, \dot{V}^{(j)})$ *les profils non linéaires et* $(w_n^{(J)}, \dot{w}_n^{(J)})$ *le reste. Alors*

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \Big| E(u_{0,n}, \dot{u}_{0,n}) - \sum_{j=1}^{J} E(V^{(j)}, \dot{V}^{(j)}) - \|(w_n^{(J)}, \dot{w}_n^{(J)})\|_{\mathcal{E}}^2 \Big| = 0.$$

Démonstration. Soit

$$\widetilde{E}(u_0, \dot{u}_0) = E(u_0) := \pi k^2 \int_0^\infty \frac{(\sin u)^2 - u^2}{r^2} r \mathrm{d}r$$

la partie non-quadratique de l'énergie. Comme pour la partie quadratique on a l'expansion de Pythagore pour tout J fixe et $n \to \infty$, il faut démontrer que

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \Big| \widetilde{E}(u_{0,n}) - \sum_{j=1}^{J} \widetilde{E}(V_n^{(j)}(0)) \Big| = 0. \tag{5.1.1}$$

Considérons la décomposition de $u_{0,n}$ en profils linéaires centrés (c'est à dire le groupe ce sont uniquement les changements d'échelle) :

$$u_{0,n} = \sum_{j=1}^{J} (\widetilde{U}^{(j)})_{\lambda_n^{(j)}} + \widetilde{w}_n^{(J)}, \qquad \lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{w}_n^{(J)}\|_{L^\infty} = 0.$$

En utilisant l'inégalité

$$|((\sin(\alpha+\beta))^2 - (\alpha+\beta)^2) - ((\sin\alpha)^2 - \alpha^2)| \lesssim (\alpha^2 + \beta^2)\beta$$

avec $\alpha := \sum_{j=1}^{J} (\widetilde{U}^{(j)})_{\lambda_n^{(j)}}$ et $\beta := \widetilde{w}_n^{(J)}$ on obtient

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \Big| \widetilde{E}(u_{0,n}) - \widetilde{E}\Big(\sum_{j=1}^{J} (\widetilde{U}^{(j)})_{\lambda_n^{(j)}} \Big) \Big| = 0.$$

Pour J fixe, par un argument de densité on obtient facilement

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{E}\Big(\sum_{j=1}^{J} (\widetilde{U}^{(j)})_{\lambda_n^{(j)}} \Big) = \sum_{j=1}^{J} \widetilde{E}\big(\widetilde{U}^{(j)}\big)$$

Pour finir la preuve de (5.1.1), on observe que si $V_n^{(j)}$ n'est pas une onde centrée, alors

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{E}\big(V_n^{(j)}(0)\big) = 0.$$

□

Jusqu'à la fin du cours, on considère le cas $E(u, \partial_t u) = 8k\pi$.

Corollaire 5.1.4. *Soit* $(u, \partial_t u) :]T_-, T_+[\to \mathcal{E}$ *une application d'onde d'énergie* $E(u, \partial_t u) = 8k\pi$. *Si* u *ne se disperse pas pour les temps positifs, alors il existe une suite* $t_n \to T_+$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(u(t), \partial_t u(t)) = 0.$$

□

Notre objectif est de démontrer qu'entre deux temps où $(u(t), \partial_t u(t))$ s'approche d'une deux-bulle, elle ne peut pas s'en éloigner. Cela finirait la démonstration du Théorème 1. Ce type de résultat a été appelé un *lemme de non-retour* par Krieger, Nakanishi et Schlag.

L'idée est simple et consiste à exploiter encore une fois l'identité de viriel. D'une manière heuristique, si $T_- < T_1 < T_2 < T_+$ et pour $j \in \{1, 2\}$ $\mathbf{d}(u(T_j), \partial_t u(T_j)) \ll 1$, alors en particulier $\|\partial_t u(T_j)\|_{L^2} \ll 1$, donc

$$\Big|\int_0^\infty \chi_R \partial_t u(T_j)\, r\partial_r u(T_j)\, r\mathrm{d}r\Big| \ll R.$$

Pour que les erreurs de cut-off soit petites, il faut que R soit plus grand que l'échelle de la bulle la moins concentrée. Si $(u, \partial_t u)$ est loin d'une deux-bulle, on peut s'attendre à ce que

$$\int_{T_1}^{T_2} |\partial_t u|_{L^2}^2\, \mathrm{d}t \simeq T_2 - T_1.$$

Il semble donc que l'on a besoin de savoir que :

— la destruction d'une deux-bulle prend au moins le temps comparable à l'échelle de la bulle la moins concentrée,

— on peut absorber le terme d'erreur $\mathcal{E}_R(u(t), \partial_t u(t))$ lié au cut-off au voisinage d'une deux-bulle.

Le deuxième point n'est pas évident car si $\mathbf{d}(u(t), \partial_t u(t))$ devient arbitrairement petit, l'analyse du chapitre précédent ne s'applique pas, et la solution n'a peut-être plus la propriété de compacité sur l'intervalle maximal d'existence. Il nous faut donc analyser les solutions au voisinage d'une deux-bulle différemment.

5.2 Modulation et coercivité

Supposons que $\mathbf{d}(u(t), \partial_t u(t))$ soit petit sur un certain intervalle de temps. Sans perdre la généralité, supposons que c'est $\mathbf{d}_+(u(t), \partial_t u(t))$ qui est petit. Il est alors naturel de décomposer la solution de manière suivante :

$$(u(t), \partial_t u(t)) = (Q_{\lambda(t)} - Q_{\mu(t)} + g(t), \dot g(t)), \qquad \|(g(t), \dot g(t))\|_{\mathcal{E}} \ll 1,\ \lambda(t) \ll \mu(t).$$

Observons que

$$\partial_t g(t) = \dot g(t) + \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \Lambda Q_{\lambda(t)} - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \Lambda Q_{\mu(t)} \neq \dot g(t),$$

mais j'espère que cela ne mènera pas à une confusion.

Une telle décomposition n'est pas unique, et la manière habituelle de la rendre unique est d'imposer des *conditions d'orthogonalité.* Par exemple, on peut demander que

$$\int_0^\infty \mathcal{Z}_{\lambda(t)}\, g(t)\, r\mathrm{d}r = \int_0^\infty \mathcal{Z}_{\mu(t)}\, g(t)\, r\mathrm{d}r = 0,$$

où

$$\mathcal{Z} \in C_0^\infty(]0, \infty[), \qquad \int_0^\infty \mathcal{Z}\, \Lambda Q\, r\mathrm{d}r \neq 0.$$

Cette contrainte rend le choix des paramètres unique, et $(\lambda, \lambda', \mu, \mu', g, \dot g)$ devient un nouveau système de coordonnées dans l'espace des phases au voisinage d'une deux-bulle.

Lemme 5.2.1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout t*

$$\|(g(t), \dot{g}(t))\|_{\mathcal{E}} \leq C\big(\lambda(t)/\mu(t)\big)^k.$$

L'idée de la preuve. Par l'hypothèse on a $E(u, \partial_t u) = 8k\pi = 2E(Q)$. D'un autre côté, on écrit

$$(u, \partial_t u) = (Q_\lambda - Q_\mu + g, \dot{g}).$$

La preuve sera finie si on peut montrer que

$$E(Q_\lambda - Q_\mu + g) \geq 16k\pi - C(\lambda/\mu)^k + c\|g\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Pour cela, une méthode est de se servir de nouveau du changement de variable $r^k = \exp^x$, ce qui nous ramène (en écrivant le DL d'ordre 2 par rapport à g) à des formes quadratiques sur $H^1(\mathbb{R})$ dont les propriétés sont bien connues.

□

5.3 Système réduit et sa justification

Une approche naturelle est d'obtenir des estimations sur les paramètres d'échelle λ et μ quand la solution est proche d'une deux-bulle. Pour prédire l'évolution des paramètre d'échelle de manière non-rigoureuse, on peut appliquer la méthode bien connue d'*approximation géodésique*, cf. l'article de survol de Stuart [9].

Considérons la variété

$$\mathcal{M} := \{Q(\lambda, \mu) := Q_\lambda - Q_\mu : 0 < \lambda \ll \mu\}.$$

On devine que le comportement des paramètres d'échelle λ et μ pourrait être décrit en première approximation par la *restriction* du système en question à $\mathcal{M}$.

Si $u(t) = Q(\lambda(t), \mu(t))$, alors

$$\int_0^\infty \big(\partial_t u(t)\big)^2 \, r\mathrm{d}r = \big((\lambda'(t))^2 + (\mu'(t))^2\big) \int_0^\infty (\Lambda Q)^2 \, r\mathrm{d}r + \ldots,$$

où on rappelle que $\Lambda := r\partial_r$ est au signe près le générateur du changement d'échelle $\mathcal{H}$-critique.

Pour $k = 1$ la dernière intégrale diverge. Ce problème peut être traité à l'aide d'une fonction cut-off bien choisie, mais par souci de simplification on se restreindra dans ce chapitre au cas $k \geq 2$, traité dans [4] (et plus tard uniquement au cas $k = 2$). Rodriguez [7] a résolu la difficulté du cas $k = 1$.

Pour $k \geq 2$ on trouve par un calcul explicite $\int_0^\infty (\Lambda Q)^2 \, r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{\sin(\pi/k)}$. On a aussi

$$\pi \int_0^\infty \Big((\partial_r u(t))^2 + \frac{k^2}{r^2}(\sin u(t))^2\Big) r\mathrm{d}r = 2E(Q) - 16\pi k(\lambda/\mu)^k + \ldots,$$

voir la démonstration du Lemme 5.2.1. Rappelons que le lagrangien est donné par (1.3.1), et on obtient

$$\mathscr{L}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') = \mathscr{L}(u) = \int \Big(\frac{2\pi^2}{\sin(\pi/k)}((\lambda')^2 + (\mu')^2) - 2E(Q) + 16\pi k(\lambda/\mu)^k + \ldots\Big)\, \mathrm{d}t,$$

qui est le lagrangien du *système réduit* pour les paramètres de modulation λ et μ. Les équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\lambda'' = \frac{k^2\sin(\pi/k)\lambda^{k-1}}{\pi\mu^k},$$
$$\mu'' = -\frac{k^2\sin(\pi/k)\lambda^k}{\pi\mu^{k+1}}.$$

À partir de ces équations, on peut prédire le comportement suivant. Supposons que la solution u se rapproche d'une deux-bulle au moment $t=0$, de sorte qu'en $t=0$, $\lambda(t)$ atteint un minimum local et $\lambda(0)=\lambda_0 \ll \mu(0)=1$. Supposons pour l'instant $\mu(t)=1$ pour tout t.

Si $k=2$, l'EDO se résout explicitement ce qui donne

$$\lambda(t) \simeq \lambda_0\cosh(t\sqrt{4/\pi}),$$

et on a une collision en temps d'ordre $|\log\lambda_0|$.

Pour $k\geq 3$ on trouve avec un peu plus d'effort

$$\lambda(t) \simeq (A_k\lambda_0^{-\frac{k-2}{2}} - B_k|t|)^{-\frac{2}{k-2}}, \qquad \text{pour } 1 \ll |t| \ll \lambda_0^{-\frac{k-2}{2}},$$

et en temps d'ordre $\lambda_0^{-\frac{k-2}{2}}$ on a une collision. Ici,

$$A_k := -\frac{(k-2)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})}{\Gamma(-\frac{1}{k})}, \qquad B_k := \frac{(k-2)\sqrt{2k\sin(\pi/k)}}{2},$$

où Γ est la fonction d'Euler (les valeurs exactes ne sont pas essentielles pour nous).

On peut vérifier que si l'on intègre deux fois $\lambda(t)^k$ sur l'intervalle de temps de $t=0$ jusqu'au début de la collision, on obtient une petite valeur, ce qui justifie le fait de négliger l'évolution de $\mu(t)$ en première approximation.

On peut vérifier également que l'intégrale de $\lambda(t)^{\frac{k}{2}}$ jusqu'au début de la collision est petite, ce qui nous donne l'espoir de gérer le terme d'erreur du viriel. En effet, il suffira d'estimer brutalement

$$\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \chi_R\partial_t u(t)\, r\partial_r u(t)\, r\mathrm{d}r\Big| \lesssim \lambda^{\frac{k}{2}},$$

où il est important d'observer que la constante ne dépend pas de R.

Pour justifier cette analyse formelle, le point essentiel est de raffiner le choix des coordonnées, ce qui ressemble à la méthode des formes normales.

On pose

$$\zeta(t) := \lambda(t) - \|\Lambda Q\|_{L^2}^{-1}\int_0^\infty \chi_{\mu(t)}\frac{1}{\lambda(t)}\Lambda Q_{\lambda(t)}\, g(t)\, r\mathrm{d}r,$$
$$b(t) := -\int_0^\infty \frac{1}{\lambda(t)}\Lambda Q_{\lambda(t)}\,\dot g(t)\, r\mathrm{d}r - \int_0^\infty \dot g(t)\,\frac{1}{\lambda(t)}\text{“}\Lambda_0\text{”}g(t)\, r\mathrm{d}r,$$

où “Λ_0” est une version localisée à l'échelle $R\lambda$ (avec $R\gg 1$) de Λ_0, mais de manière un peu plus compliquée que juste en multipliant par un cut-off (le multiplicateur r est remplacée par une fonction bornée vérifiant certaines propriétés).

Proposition 5.3.1. *Sur tout intervalle de temps où la solution est proche d'une deux-bulle les estimations suivantes sont vraies (où les grandes constantes dépendent uniquement de k et les petites constantes sont arbitrairement petites lorsque $\mathbf{d}(u, \partial_t u)$ devient petit) :*

$$\begin{aligned}
&|\zeta(t)/\lambda(t) - 1| \ll 1, \\
&\left|\zeta'(t) - b(t)\right| \ll \left(\lambda(t)/\mu(t)\right)^{\frac{k}{2}} \\
&|b(t)| \lesssim \left(\lambda(t)/\mu(t)\right)^{\frac{k}{2}}, \\
&|b'(t)| \lesssim \lambda(t)^{k-1}/\mu(t)^k, \\
&b'(t) \gtrsim \lambda(t)^{k-1}/\mu(t)^k.
\end{aligned}$$

□

On omettra la preuve, qui est assez longue.

Voici comment on utilise ce lemme. Pour simplifier, posons toujours $\mu(t) \equiv 1$ et prenons le cas $k = 2$. Alors $b' \gtrsim \zeta$, $|b| \leq \zeta$ et $|\zeta' - b| \ll \zeta$. Soit $\xi := b + c_0\zeta$. Si c_0 est suffisamment petit, alors $\xi' \gtrsim \zeta \gtrsim \xi$. Quand $(u, \partial_t u)$ passe proche d'une deux-bulle, $\zeta(t)$ atteint à un certain moment t_0 sa valeur minimale, donc $\zeta'(t_0) = 0$ ce qui implique $|\xi'(t_0)| \ll |\xi(t_0)|$, et l'inégalité $\xi' \gtrsim \xi$ implique que $\xi(t)$ croit exponentiellement dans les deux direction de temps à partir de t_0. C'est ce dont on a besoin pour l'argument esquissé ci-dessus.

5.4 Concentration-compacité, Acte II

Revenons aux intervalles de temps où la solution est loin d'une deux-bulle.

Lemme 5.4.1. *Soit $(u, \partial_t u) : [0, T_+[\to \mathcal{E}$ une solution de (1.2.2) d'énergie $E(u, \partial_t u) = 8k\pi$, qui ne se disperse pas pour les temps positifs. Soit $t_n \to T_+$ une suite telle que*

$$\limsup_n \mathbf{d}(u(t_n), \partial_t u(t_n)) > 0.$$

Alors, après extraction d'une sous-suite, il existe une suite $\nu_n > 0$ et $(v_0, \dot{v}_0) \in \mathcal{E}$ tels que

$$(u(t_n), \partial_t u(t_n))_{1/\nu_n} \to (v_0, \dot{v}_0) \qquad \text{(conv. forte dans } \mathcal{E}\text{)}.$$

De plus, la solution v de (1.2.2) correspondant à la donnée initiale $(v_0, \dot{v}_0)$ ne se disperse pas pour les positifs ni pour les temps négatifs.

Démonstration. Il faut montrer qu'il y a un profil et que c'est une onde centrée. S'il y avait deux profils non nuls, alors le Lemme 5.1.3 impliquerait que tous les profils ont l'énergie $E(V^{(j)}, \dot{V}^{(j)}) < 8k\pi$, donc se dispersent dans les deux directions de temps, ce qui est impossible. Donc il y a un profil, et le Lemme 5.1.3 montre que $\lim_{n\to\infty} \|(w_n^{(1)}, \dot{w}_n^{(1)})\|_{\mathcal{E}} = 0$.

La raison pour laquelle $V_n^{(1)}$ doit être une onde centrée est la même que dans le cas du Lemme 4.1.3.

Si $V_n^{(1)}$ se dispersait pour les temps positifs, alors u aussi ce qui est impossible. Si $V_n^{(1)}$ se dispersait pour les temps négatifs alors par la théorie de Cauchy on aurait que la suite $\|u\|_{S([0,t_n])}$ est bornée ce qui est impossible. □

Soit $I_1 = [b_0, a_1], I_2 = [b_1, a_2], \ldots$ les intervalles de temps où $\mathbf{d}(u, \partial_t u) \geq \epsilon > 0$ (avec $\epsilon \ll 1$) et entre I_j et I_{j+1} la solution passe à distance $\mathbf{d}(u, \partial_t u) \leq \epsilon$ d'une deux-bulle. Alors, d'après l'analyse de la section précédente, dans chaque intervalle I_j la distance $\mathbf{d}(u, \partial_t u)$ atteint une valeur $\epsilon_0 \gg \epsilon$.

Le lemme précédent dit que $(u, \partial_t u)$ a la propriété de compacité sur $\bigcup_j I_j$, et on peut voir qu'il existe une fonction d'échelle (continue) $\nu : \bigcup_j I_j \to]0, \infty[$ telle que l'ensemble

$$\bigcup_j \{(u(t), \partial_t u(t))_{1/\nu(t)} : t \in I_m\}$$

est précompact dans $\mathcal{E}$. Il s'avère qu'elle peut être prise constante sur chaque intervalle.

Lemme 5.4.2. *Soit $\nu_m := |I_m|$. Alors l'ensemble*

$$\bigcup_j \{(u(t), \partial_t u(t))_{1/\nu_m} : t \in I_m\}$$

est précompact dans $\mathcal{E}$.

Démonstration. Supposons par contradiction qu'il existe des suites m_n et $t_n \in I_{m_n}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\nu_{m_n}}{\nu(t_n)} = 0. \tag{5.4.1}$$

Soit $(u_n(s), \partial_s u_n(s))$ la solution de (1.2.2) pour la donnée initiale

$$(u_n(0), \partial_s u_n(0)) = (u(t_n), \partial_t u(t_n))_{1/\nu(t_n)}.$$

Après extraction d'une sous-suite, $(u_n(0), \partial_s u_n(0)) \to (v_0, \dot v_0) \in \mathcal{E}$. Soit $(v(s), \partial_s v(s)) : [-s_0, s_0] \to \mathcal{E}$ la solution de (1.2.2) pour la donnée initiale $(v(0), \partial_s v(0)) = (v_0, \dot v_0)$ (pour un certain $s_0 > 0$). Par la théorie de Cauchy, pour n grand la solution $(u_n, \partial_s u_n)$ est définie pour $s \in [-s_0, s_0]$ et $(u_n(s), \partial_s u_n(s)) \to (v(s), \partial_s v(s))$, uniformément pour $s \in [-s_0, s_0]$.

Soit $t_n' \in I_{m_n}$ une suite quelconque. Soit $s_n := \frac{t_n' - t_n}{\nu(t_n)}$. Alors (5.4.1) implique $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$, donc $s_n \in [-s_0, s_0]$ pour n grand, d'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(u_n(s_n), \partial_s u(s_n)) - (v(s_n), \partial_s v(s_n))\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Mais $\lim_{n\to+\infty} \|(v(s_n), \partial_s v(s_n)) - (v_0, \dot v_0)\|_{\mathcal{E}} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|(u(s_n), \partial_s u(s_n)) - (v_0, \dot v_0)\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{d}(u_n(s_n), \partial_s u(s_n)) = \mathbf{d}(v_0, \dot v_0)$. Si on prend en compte que $\mathbf{d}(u(t_n'), \partial_t u(t_n')) = \mathbf{d}(u_n(s_n), \partial_s u(s_n))$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{d}(u(t_n'), \partial_t u(t_n')) = \mathbf{d}(v_0, \dot v_0),$$

pour toute suite $t_n' \in I_{m_n}$. C'est impossible car $\mathbf{d}(u(t), \partial_t u(t))$ varie au moins de ϵ à $\epsilon_0 \gg \epsilon$ sur chaque intervalle I_m.

Supposons maintenant qu'il existe des suites m_n et $t_n \in I_{m_n}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\nu(t_n)}{\nu_{m_n}} = 0.$$

Sans restreindre la généralité, considérons le cas

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\nu(t_n)}{a_{m_n}-t_n}=0,$$

le cas $\nu(t_n)/(t_n-b_{m_n-1})\to 0$ étant similaire.

Comme dans la première partie de la preuve, soit $(u_n,\partial_s u_n)$ la solution de (1.2.2) pour la donnée initiale $(u_n(0),\partial_s u_n(0))=(u(t_n),\partial_t u(t_n))_{1/\nu(t_n)}$, et soit $(u_n(0),\partial_s u_n(0))\to(v_0,\dot v_0)\in\mathcal{E}$. Soit $(v(s),\partial_s v(s)):]T_-,T_+[\to\mathcal{E}$ la solution de (1.2.2) pour la donnée initiale $(v(0),\partial_s v(0))=(v_0,\dot v_0)$.

Le Lemme 5.4.1 implique en particulier que $(v,\partial_s v)$ ne se disperse dans aucune direction de temps. On a aussi $E(v,\partial_s v)=8k\pi$, donc il existe $\sigma\in[0,T_+[$ tel que $\mathbf{d}(v(\sigma),\partial_s v(\sigma))\leq\frac12\epsilon$. Par la théorie de Cauchy, pour n grand $(u_n,\partial_s u_n)$ est définie pour $s\in[0,\sigma]$ et $(u_n(\sigma),\partial_s u_n(\sigma))\to(v(\sigma),\partial_s v(\sigma))$, en particulier $\mathbf{d}(u_n(\sigma),\partial_s u_n(\sigma))\to\mathbf{d}(v(\sigma),\partial_s v(\sigma))\leq\frac12\epsilon$.

Soit $t_n':=t_n+\nu(t_n)\sigma$. Alors $(u(t_n'),\partial_t u(t_n'))=(u_n(\sigma),\partial_s u_n(\sigma))_{\nu(t_n)}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{d}(u(t_n'),\partial_t u(t_n'))=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{d}(u_n(\sigma),\partial_s u_n(\sigma))\leq\frac12\epsilon.$$

Or, (5.4.1) implique que pour n suffisamment grand $t_n\leq t_n'\leq a_{m_n}$, donc $\mathbf{d}(u(t_n'),\partial_t u(t_n'))\geq\epsilon$, une contradiction. □

Lemme 5.4.3. *Il existe $c_0>0$ tel que pour tout m*

$$\int_{I_m}\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\geq c_0\nu_m.$$

Démonstration. Exercice (cf. preuve de la Proposition 4.2.1). □

Bibliographie

[1] H. Bahouri and P. Gérard. High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations. *Amer. J. Math.*, **121**, 1998.

[2] R. Côte, C. Kenig, A. Lawrie and W. Schlag. Characterization of large energy solutions of the equivariant wave map problem : I. *Amer. J. Math.*, **137**(1) : 139–207, 2015.

[3] P. Gérard. Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **3** : 213–233, 1998.

[4] J. Jendrej and A. Lawrie. Two-bubble dynamics for threshold solutions to the wave maps equation. *Invent. Math.*, 213(3) :1249–1325, 2018.

[5] M. Keel and T. Tao. Endpoint Strichartz Estimates, *Amer. J. Math.*, **120**, 1998.

[6] F. Planchon, J. G. Stalker, and A. S. Tahvildar-Zadeh. L^p estimates for the wave equation with the inverse-square potential. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9(2) :427–442, 2003.

[7] C. Rodriguez. Threshold dynamics for corotational wave maps. *Preprint*, 2018.

[8] J. Shatah and A. S. Tahvildar-Zadeh. Regularity of harmonic maps from the Minkowski space into rotationally symmetric manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.* **45**(8) :947–971, 1992.

[9] D. M. A. Stuart. Analysis of the adiabatic limit for solitons in classical field theory. *Proc. R. Soc. A*, **463** : 2753–2781 (2007).