École Polytechnique
Département de Mathématiques
Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Joint Master of Science Programme

Jacek Jendrej
Student no. 277525

Comportement global de solutions de l'équation des ondes énergie critique en dimension 3

Master thesis
in Mathematics

Supervisor
Yvan Martel
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz

Co-supervisor at the home institution
Witold Sadowski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

July 2013

Supervisor's statement

Hereby I confirm that the present thesis was prepared under my supervision and that it fulfils the requirements for the degree of Master of Mathematics.

Date Supervisor's signature

Author's statement

Hereby I declare that the present thesis was prepared by me and none of its contents was obtained by means that are against the law. I also declare that the present thesis is a part of the Joint Master of Science Programme of the University of Warsaw and the cole Polytechnique in Palaiseau. The thesis has never before been a subject of any procedure of obtaining an academic degree. Moreover, I declare that the present version of the thesis is identical to the attached electronic version.

Date Author's signature

Abstract

We present the classification of global radial solutions of the wave equation with energy-critical focusing nonlinearity, in three space dimensions. This result, obtained recently by Duyckaerts, Kenig and Merle, gives a positive answer to the *soliton resolution conjecture* in this special case. This is the first example of such a classification for a non-integrable system. The proof is relatively self-contained. The present work introduces all the necessary material beyond standard tools of mathematical analysis, in particular the Cauchy theory for the critical nonlinearity and the profile decomposition technique.

Keywords

wave, nonlinear, profile, soliton, dispersion

Thesis domain (Socrates-Erasmus subject area codes)

11.1 Mathematics

Subject classification

35L05 Wave equation; 35L71 Semilinear second-order hyperbolic equations

Title in English

Global behavior of solutions of the energy-critical focusing wave equation in three dimensions

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1. Le théorème

On s'intéresse à l'équation des ondes non linéaire énergie critique en dimension 1+3 :

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = u(t,x)^5 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (u, \partial_t u)_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{1.1}$$

La théorie de Cauchy pour cette equation sera présentée plus tard. Notons pour l'instant que l'équation est localement bien posée dans $\dot{H}^1 \times L^2(\mathbb{R}^3)$.

Remarque 1.1. Pour $u \in C(\mathbb{R}; \dot{H}^1) \cap \dot{C}^1(\mathbb{R}; L^2)$ on notera $\overrightarrow{u}(t,x) := (u(t,x), \partial_t u(t,x))$ et $u_\lambda(t) := \frac{1}{\lambda^{1/2}} u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right)$. Une fonction u est une solution de (1.1) si et seulement si u_λ l'est. En plus, $\|u_\lambda(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} = \|u(\frac{t}{\lambda}, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ et c'est la raison pour laquelle l'équation (1.1) est dite "énergie critique".

On va toujours supposer que les données initiales possèdent la symétrie sphérique. Par l'unicité des solutions du problème (1.1), cette symétrie est préservée pour tout temps. Une solution radiale particulière est l'onde progressive ou un *soliton*

$$W(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{3}\right)^{-1/2}. \tag{1.2}$$

En utilisant l'invariance par rapport au changement d'échelle on obtient d'autres solitons $W_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda^{1/2}} W\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $\lambda \in]0, +\infty[$. Dans le cas de la non linéarité critique, les solitons sont des solutions stationnaires.

En suivant [DKM4], on va démontrer le théorème de classification de solutions globales.

Théorème 1.2. *Soit* $(u, \partial_t u) \in C(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1 \times L^2)$ *une solution globale de* (1.1). *Alors il existe une onde linéaire* v_{L}, $J \in \mathbb{N}$, $\imath_j = \pm 1$ *et* $\lambda_j(t) \in]0, +\infty[$ *pour* $j \in 1, \ldots, J$ *tels que pour* $t \to +\infty$

$$\lambda_1(t) \ll \ldots \ll \lambda_J(t) \ll t \tag{1.3}$$

et

$$\left\| (u(t), \partial_t u(t)) - \left(v_{\mathrm{L}}(t) + \sum_{j=1}^{J} \imath_j W_{\lambda_j(t)}, \partial_t v_{\mathrm{L}}(t) \right) \right\|_{\dot{H}^1 \times L^2} \to 0. \tag{1.4}$$

1.2. Perspective historique

Chronologiquement, le premier résultat non perturbatif de classification (partielle) pour l'équation des ondes dans le cas de la non linéarité énergie critique est le théorème suivant de C. Kenig et F. Merle [KM08].

Théorème 1.3. *Soit* $u(t,x)$ *solution de* (1.1) *pour la donnée initiale* (u_0, u_1) *telle que*

$$E(u_0, u_1) < E(W, 0).$$

Alors

a. $\|u_0\|_{\dot{H}^1} \neq \|W\|_{\dot{H}^1}$,

b. $\|u_0\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1} \Rightarrow u$ *disperse pour* $t \to \pm\infty$,

c. $\|u_0\|_{\dot{H}^1} > \|W\|_{\dot{H}^1} \Rightarrow$ *blow-up en temps fini pour les temps positifs et négatifs.*

Comme il est déjà visible dans l'énoncé, ce théorème est basé sur la caractérisation variationnelle de l'état fondamental, donnée par le théorème suivant de [Aub76] et [Tal76].

Théorème 1.4. *Soit*

$$C_N := \sup_{\|\nabla u\|_{L^2}=1} \|u\|_{L^6} \tag{1.5}$$

la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev pour l'exposant critique $2^* = 6$*. Alors*

$$\|u_0\|_{L^6} = C_N \|\nabla u_0\|_{L^2} \Longleftrightarrow \theta W_{\lambda_0}(\cdot - x_0) \qquad \text{pour } \lambda_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}^3, \theta \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Le théorème de décomposition en profils de H. Bahouri et P. Gérard [BG99] permet d'employer la méthode de "compacité et contradiction", utilisée avant par exemple dans [MM01] pour étudier la stabilité asymptotique des solitons.

Les auteurs ont repris cette stratégie dans les articles [DM08], [DKM1] et [DKM2] pour compléter et améliorer les résultats. Il existe des théorèmes similaires pour d'autres équations, notamment pour l'équation de Schrödinger (cf. [KM06], [DM09]), mais l'équation des ondes est le mieux étudiée dans le cas de la non linéarité $\dot{H}^1$-critique.

Dans l'article [DKM4], l'angle d'approche est différent. La caractéristation variationnelle des états fondamentaux est complétement remplacée par la caractérisation dynamique, connue sous le nom des "canaux d'énergie" (cf. Section 4). Il faut mentionner que cette idée apparaît déjà dans [DKM2], sous la forme du principe suivant :

$$\text{Toute solution assez petite engendre une propagation à la vitesse de la lumière.} \tag{1.7}$$

Ici, un principe beaucoup plus fort est utilisé :

$$\begin{gathered}\text{Toute solution } \textit{radiale} \text{ qui n'est pas une onde progressive} \\ \text{engendre une propagation à la vitesse de la lumière.}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Le mot "radiale" dans (1.8) vient du fait que la démonstration de ce principe fait usage de l'existence des canaux localisés, qui sont très difficile à analyser dans le cas non-radial. En revanche, (1.7) est toujours vrai.

1.3. Plan de la démonstration

Dans le Chapitre 2 on résume la théorie de Cauchy pour l'équation (1.1).

Dans le Chapitre 3 on présente brièvement la méthode de la décomposition en profils [BG99] qui, dans ses nombreuses variantes, est la clé de tous les résultats concernant la conjecture de décomposition en solitons. On montre aussi, par un argument de type viriel, que toute solution globale est bornée en norme $\dot{H}^1 \times L^2$. Ensuite, on utilise la décomposition en profils pour extraire la partie linéaire v_{L} de la solution. On obtient en particulier ceci :

$$u - v_{\mathrm{L}} \text{ se propage moins vite que la vitesse de la lumière.} \tag{1.9}$$

Dans le Chapitre 4 on démontre (1.8).

Dans le Chapitre 5 on combine (1.8) et (1.9) pour identifier tous les profils non dispersifs comme des ondes progressives, et terminer ainsi la démonstration du Théorème 1.2.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1. Théorie de Cauchy

La théorie de Cauchy pour l'équation (1.1) a été développée pendant plusieurs années par de différents auteurs. Elle est toujours basée sur les inégalités de Strichartz, mais les choix des exposants varient. Ici on utilise [Chemin] pour la théorie locale et [BG99] pour la théorie de perturbation en temps long. La présentation est organisée selon le résumé de la théorie de Cauchy dans [DKM1]. La théorie locale peut être développée de façon similaire pour toute dimension $d \geq 3$. La théorie de perturbation est plus compliquée pour la nonlinéarité non algébrique (c'est le cas pour $d > 3$), mais il semble qu'il n'y a pas de difficultés fondamentales.

Notation. Dans ce qui suit, les symboles $\dot{H}^1$ et L^2, si le domaine n'est pas précisé, signifient toujours $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ et $L^2(\mathbb{R}^3)$.

L'équation des ondes semi linéaire générale s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta_x u = F(t, x, u) \qquad (t, x) \in I \times \mathbb{R}^3 \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{2.1}$$

où F est une fonction régulière par rapport à u.

Il est possible de développer une théorie de Cauchy pour cette équation dans le cas critique, mais pour simplifier les choses on va considérer seulement les deux cas particuliers qui seront utilisés plus tard :

- $F(t, x, u) = u^5$ (Proposition 2.2, Corollaire 2.10),
- $F(t, x, u) = 5V^4u + 10V^3u^2 + 10V^2u^3 + 5Vu^4 + u^5$, où $V \colon I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est petite dans un certain sens (Lemme 4.5, Lemme 4.6).

Rappelons que l'équation des ondes linéaire

$$\begin{cases} \partial_{tt}w - \Delta_x w = h \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (w, \partial_t w)|_{t=0} = (w_0, w_1) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{2.2}$$

possède une unique solution donnée par la formule de Duhamel

$$w(t) = S(t)(w_0, w_1) + \int_0^t \frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} h(s)\, ds,$$

où

$$S(t)(w_0,w_1) := \cos(t\sqrt{-\Delta})w_0 + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}w_1$$

est le propagateur linéaire. On dit que u est solution de l'équation (2.1) sur l'intervalle $I \ni 0$ si elle vérifie l'équation intégrale

$$u(t) = S(t)(u_0,u_1) + \int_0^t \frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}F(s,x,u)\,ds$$

(en particulier l'intégrale à droite doit être bien définie).

2.2. Existence locale, existence globale et dispersion

Pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et des fonctions $w, h : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on définit

$$\begin{aligned} S(I) &:= L^5(I; L^{10}(\mathbb{R}^3)), & \|w\|_{S(I)} &:= \|w\|_{L^5(I;L^{10}(\mathbb{R}^3))}, \\ N(I) &:= L^1(I; L^2(\mathbb{R}^3)), & \|h\|_{N(I)} &:= \|h\|_{L^1(I;L^2(\mathbb{R}^3))}. \end{aligned}$$

On admettra sans démonstration les estimations suivantes :

Théorème 2.1 (cf. [Tao], Théorème 2.6)**.** *Soit w solution de* (2.2)*. Alors*

$$\sup_t \|(w,\partial_t w)\|_{\dot H^1\times L^2} \le C\big(\|(w_0,w_1)\|_{\dot H^1\times L^2} + \|h\|_{N(I)}\big), \tag{2.3}$$

$$\|w\|_{S(I)} \le C\big(\|(w_0,w_1)\|_{\dot H^1\times L^2} + \|h\|_{N(I)}\big). \tag{2.4}$$

L'inégalité (2.3) est appelée "l'estimation d'énergie" et (2.4) "une estimation de Strichartz". Ces estimations permettent de résoudre le problème de Cauchy en utilisant la méthode de point fixe.

Proposition 2.2. *Il existe une constante $\delta_0 > 0$ qui a la propriété suivante. Soit $0 \in I \subset \mathbb{R}$. Soit $(u_0,u_1) \in \dot H^1 \times L^2$ avec $\|S(t)(u_0,u_1)\|_{S(I)} = \delta \le \delta_0$. Alors il existe une unique solution intégrale $u \in C(I;\dot H^1) \cap \dot C^1(I;L^2) \cap S(I)$ du problème* (1.1)*. Cette solution vérifie*

$$\sup_{t\in I}\|\vec u(t) - \vec u_{\mathrm{L}}(t)\|_{\dot H^1\times L^2} + \|u - u_{\mathrm{L}}\|_{S(I)} \le C\delta^5, \tag{2.5}$$

où $u_{\mathrm{L}}(t) = S(t)(u_0,u_1)$, et

$$\frac{1}{2}\delta \le \|u\|_{S(I)} \le 2\delta. \tag{2.6}$$

Démonstration. Pour $\rho \ge 0$ soit

$$B_\rho := \{u \in S(I) : \|u\|_{S(I)} \le \rho\}.$$

On considère l'application

$$\Phi(u)(t) := S(t)(u_0,u_1) + \int_0^t \frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}\big(u(s)^5\big)\,ds.$$

Soit $u \in B_\rho$. Par l'inégalité de Strichartz on obtient

$$\|\Phi(u)\|_{S(I)} \le \delta + C\rho^5.$$

Alors, si on choisit $\rho = 2\delta$, l'application Φ préserve l'ensemble B_ρ, pourvu que $C(2\delta)^5 \leq \delta$, ce qui est vrai pour $\delta \leq \delta_0$ et δ_0 suffisamment petit.

De façon similaire on obtient que pour δ_0 suffisamment petit Φ est une contraction sur B_ρ. Par le Théorème de Picard il existe l'unique application $u \in B_\rho$ telle que $\Phi(u) = u$.

L'estimation d'énergie avec $(w_0, w_1) = 0$ montre que

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0}\|(u(t) - u_0, \partial_t u(t) - u_1)\|_{\dot{H}^1\times L^2} = \\ \lim_{t\to 0}&\|(u(t) - S(t)(u_0, u_1), \partial_t\big(u(t) - S(t)(u_0, u_1)\big)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \leq C\lim_{t\to 0}\|u\|^5_{S([0,t])} = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donc $u \in C(I, \dot{H}^1) \cap \dot{C}^1(I, L^2)$.

Le Théorème 2.1 (dans le cas $(w_0, w_1) = 0$) et le fait que $\|u\|_{S(I)} \leq 2\delta$ impliquent (2.5). L'estimation (2.6) est une conséquence immédiate de (2.5) pour δ suffisamment petit. □

Lemme 2.3. *Soit $u \in C(I; \dot{H}^1) \cap \dot{C}^1(I; L^2) \cap S(I)$ une solution de* (1.1) *telle que $\|u\|_{S(I)} = \epsilon \leq \epsilon_0$, où ϵ_0 est suffisamment petit. Alors*

$$\frac{1}{2}\epsilon \leq \|S(t)(u_0, u_1)\|_{S(I)} \leq 2\epsilon. \tag{2.8}$$

Démonstration. En vue de (2.6) il suffit de montrer que si $\|u\|_{S(I)}$ est suffisamment petit, alors $\|S(t)(u_0, u_1)\|_{S(I)} \leq \delta_0$, où δ_0 est donné par la Proposition 2.2.

Sinon, il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $\|S(t)(u_0, u_1)\|_{S(J)} = \delta_0$. Or par l'inégalité (2.5)

$$\delta_0 = \|S(t)(u_0, u_1)\|_{S(J)} \leq \|u\|_{S(J)} + C\delta_0^5 \leq \|u\|_{S(I)} + \frac{\delta_0}{4},$$

ce qui est impossible si, par exemple, $\|u\|_{S(I)} \leq \frac{\delta_0}{4}$. □

Remarque 2.4. Pour ε petit et $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ la norme $\|S(t)(u_0, u_1)\|_{S(I)} \leq \delta_0$ par l'estimation de Strichartz (dans le cas $h = 0$) avec le théorème de convergence dominée, donc on a une unique solution $u \in S(I)$. En particulier pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ on définit l'intervalle maximale d'existence $I_{\max} =]-T_-(u_0, u_1), T_+(u_0, u_1)[$.

Définition 2.5. On dit que la solution u de (1.1) *disperse* pour les temps positifs (négatifs) s'il existe v_{L} une solution du problème linéaire telle que

$$\lim\|\overrightarrow{u}(t) - \overrightarrow{v}_{\mathrm{L}}(t)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \to 0 \tag{2.9}$$

quand $t \to T_+$ ($t \to -T_-$).

Remarque 2.6. En particulier, si u disperse pour les temps positifs (négatifs), alors $T_+ = +\infty$ ($T_- = +\infty$). En effet, dans le cas contraire $\overrightarrow{u}(t)$ aurait une limite forte dans $\dot{H}^1 \times L^2$ quand $t \to T_+$, ce qui permettrait de prolonger la solution, contradiction avec la définition de T_+.

Corollaire 2.7 (Critère de dispersion)**.** *Soit u solution de* (1.1)*. Alors u disperse pour les temps positifs si et seulement si*

$$\|u\|_{S([0,T_+[)} < +\infty. \tag{2.10}$$

Remarque 2.8. En particulier, on obtient le *critère de blow-up* :

$$T_+ < +\infty \Rightarrow \|u\|_{S([0,T_+[)} = +\infty.$$

Démonstration. Supposons (2.9), soit $T_0 \geq 0$ et soit $\delta = \|v\|_{S([T_0,+\infty[)}$. On voit que $\delta \to 0$ quand $T_0 \to +\infty$. Par l'inégalité de Strichartz et l'inégalité triangulaire on obtient

$$\|S(s-T_0)\overrightarrow{u}(T_0)\|_{S([T_0,+\infty[)} \leq C\big(\|\overrightarrow{u}(T_0) - \overrightarrow{v}(T_0)\|_{\dot{H}^1\times L^2} + \|v\|_{S([T_0,+\infty[)}\big) \xrightarrow[T_0\to+\infty]{} 0.$$

Alors (2.6) (appliqué pour $I = [T_0, +\infty[$) montre que $\|u\|_{S([T_0,+\infty[)} < +\infty$, donc aussi $\|u\|_{S([0,+\infty[)} < +\infty$.

Réciproquement, supposons (2.10). Pour $T_0 \in [0, T_+[$, soit v_{T_0} la solution de l'équation linéaire telle que $\overrightarrow{v}_{T_0}(T_0) = \overrightarrow{u}(T_0)$. Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{v}_{T_0}(0)$ a une limite (v_0, v_1) dans $\dot{H}^1 \times L^2$ quand $T_0 \to T_+$. Soit $\epsilon = \|u\|_{S([T_0,T_+[)}$. On voit que $\epsilon \to 0$ quand $T_0 \to T_+$. Les estimations (2.8) et (2.5) montre que

$$\sup_{t\in[T_0,T_+[} \|\overrightarrow{v}_t(0) - \overrightarrow{v}_{T_0}(0)\|_{\dot{H}^1\times L^2} = \sup_{t\in[T_0,T_+[} \|\overrightarrow{u}(t) - \overrightarrow{v}_{T_0}(t)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \leq C\epsilon,$$

donc $v_t(0)$ satisfait le Critère de Cauchy pour $t \to T_+$, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 2.9. Cette démonstration est une façon de dire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin((-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} \big(u(s)^5\big)\, ds$$

converge dans $\dot{H}^1$. Ensuite, il est facile de voir qu'il suffit de poser

$$v(t) := S(t)(u_0, u_1) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} \big(u(s)^5\big)\, ds.$$

Corollaire 2.10. *Il existe δ_0 tel que si $\|(u_0,u_1)\|_{\dot{H}^1\times L^2} = \delta \leq \delta_0$, alors l'équation* (1.1) *a une unique solution globale. Cette solution satisfait l'estimation*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\overrightarrow{u}(t)\|_{\dot{H}^1\times L^2} + \|u\|_{S(\mathbb{R})} \leq 4\delta \tag{2.11}$$

(en particulier elle disperse pour $t \to \pm\infty$). En plus, si u_{L} est la solution du problème linéaire avec les mêmes données initiales, alors

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_{\mathrm{L}}}\|_{\dot{H}^1\times L^2} \leq C\delta^5.$$

2.3. Théorie de perturbation

Le théorème suivant est l'outil principal pour traiter de faibles interactions.

Théorème 2.11. *Pour tout $M > 0$ il existe $\varepsilon = \varepsilon_0(M)$ ayant la propriété suivante. Soit $I = [0,T]$ ou $I = [0, +\infty[$, et soit $\widetilde{u}$ une fonction définie sur $I \times \mathbb{R}^3$ telle que*

$$\|\widetilde{u}\|_{S(I)} \leq M$$

et qui vérifie, au sens de l'équation intégrale correspondante,

$$\partial_t^2 \widetilde{u} - \Delta_x \widetilde{u} = \widetilde{u}^5 + h, \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R}^3.$$

Soit $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1) := (\widetilde{u}(0), \partial_t \widetilde{u}(0))$, $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ *et* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. *Supposons que*

$$\|(u_0, u_1) - (\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1)\|_{\dot{H}^1 \times L^2} + \|h\|_{N(I)} \leq \varepsilon. \tag{2.12}$$

Alors la solution u *du problème* (1.1) *avec la donnée initiale* (u_0, u_1) *est définie sur* I. *En plus, il existe* $C(M) < +\infty$ *tel que*

$$\sup_{t \in I} \|(u(t), \partial_t u(t)) - (\widetilde{u}(t), \partial_t \widetilde{u}(t))\|_{\dot{H}^1 \times L^2} + \|u - \widetilde{u}\|_{S(I)} \leq C(M)\varepsilon. \tag{2.13}$$

Remarque 2.12. À cause de la réversibilité temporelle un théorème analogue est vrai pour les temps négatifs.

Démonstration. On considère $r := u - \widetilde{u}$. L'équation pour r est la suivante :

$$\partial_t^2 r - \Delta_x r = (\widetilde{u} + r)^5 - \widetilde{u}^5 - h. \tag{2.14}$$

Pour $\|\widetilde{u}\|_{S(I)}$ petit on sait la résoudre par le point fixe :

Lemme 2.13. *Il existe des constantes* $\eta_1, \varepsilon_1 > 0$ *ayant la propriété suivante. Soit* $J \subset \mathbb{R}$, $0 \in J$ *et supposons que*

$$\|\widetilde{u}\|_{S(J)} \leq \eta_1, \quad \|h\|_{N(J)} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad \|(r_0, r_1)\|_{\dot{H}^1 \times L^2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1. \tag{2.15}$$

Alors il existe une unique solution $r \in S(J)$ *de l'équation* (2.14). *Cette solution vérifie*

$$\sup_{t \in J} \|\overrightarrow{r}(t)\|_{\dot{H}^1 \times L^2} + \|r\|_{S(J)} \leq C\varepsilon \tag{2.16}$$

pour une certaine constante universelle C *qui ne dépend ni de* J *ni de* ε.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.2. Pour alléger la notation posons $f := (\widetilde{u} + r)^5 - \widetilde{u}^5$ et notons que par l'inégalité de Hölder

$$\|f\|_{N(J)} \leq C\big(\|\widetilde{u}\|_{S(J)}^4 \|r\|_{S(J)} + \|r\|_{S(J)}^5\big).$$

On définit

$$\Phi(r)(t) := S(t)(r_0, r_1) + \int_0^t \frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} \big(f(s) - h(s)\big)\, ds. \tag{2.17}$$

Le Théorème 2.1 donne

$$\begin{aligned} \sup_{t \in J} \|\overrightarrow{r}(t)\|_{\dot{H}^1 \times L^2} + \|r\|_{S(J)} &\leq C\big(\|(r_0, r_1)\|_{\dot{H}^1 \times L^2} + \|\widetilde{u}\|_{S(J)}^4 \|r\|_{S(J)} + \|r\|_{S(J)}^5 + \|h\|_{N(J)}\big) \\ &\leq C\big(2\epsilon + (\eta_0^4 + \|r\|_{S(J)}^4)\|r\|_{S(J)}\big). \end{aligned} \tag{2.18}$$

En particulier, on voit que si $\eta_1^4 \leq 1/4C$ et $(4C\varepsilon)^4 \leq 1/4C$, alors la boule B_ρ est invariante pour $\rho = 4C\varepsilon$. De façon similaire on obtient que pour ε suffisamment petit Φ est une contraction sur cette boule. Cela implique l'existence de la solution r dans l'espace $S(J)$, qui vérifient en plus $\|r\|_{S(J)} \leq 4C\varepsilon$. L'estimation (2.18) entraîne (2.16). □

Maintenant, soit $n := \big[\frac{M}{\eta_1}\big] + 1$, où η_1 et donné par le Lemme. Alors il existe $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ une suite telle que $\|\widetilde{u}\|_{S(J)} \leq \eta_1$ pour $J = [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$. Soit $\varepsilon_0 := \varepsilon_1 \cdot C^{-n}$, où ε_1 et C sont donnés par le Lemme. On utilise le Lemme sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ et on obtient ainsi la conclusion du Théorème avec $C(M) = C^n$. □

Remarque 2.14. On peut démontrer que si $(u_0, u_1) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors la solution u est globale et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}; C_c^\infty(\mathbb{R}^3))$. L'ensemble $C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $\dot{H}^1 \times L^2$, donc la théorie de perturbation avec la persistance de la régularité justifient des calculs formels sur des solutions, même si elles ne sont pas, en apparence, assez régulières.

2.4. Propriétés de l'équation linéaire

Théorème 2.15 (cf. [Evans], p. 72 et p. 82)**.** *La solution du problème* (2.2) *est donnée par la* formule de Kirchhoff

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} t w_1(y) + w_0(y) + \nabla_x w_0(y) \cdot (y - x) \, dS(y) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{h(t - |y-x|, y)}{|y-x|} \, dy, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Pour $t \leq 0$ on obtient une formule similaire. Observons que dans le cas particulier de l'équation homogène

$$\begin{cases} \partial_{tt} w(t,x) - \Delta_x w(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (w, \partial_t w)_{\restriction t=0} = (w_0, w_1) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{2.19}$$

la solution $w(t,x)$ dépend des valeurs de (w_0, w_1) sur la sphère de centre x et de rayon $|t|$ uniquement. Ce comportement est spécifique pour la dimension d'espace égale à 3. On l'appelle le "principe fort de Huyghens". En ce qui concerne la non homogénéité $h(s,y)$, ce qui compte ce sont uniquement ces valeurs sur le *cône de la lumière* $\{(s,y) : 0 \leq s \leq t : |y-x| = t - s\}$.

Corollaire 2.16 (Vitesse de propagation pour l'équation non linéaire)**.** *Soit* $R \geq 0$*,* $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$*,* $(\hat{u}_0, \hat{u}_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ *des données initiales telles que*

$$(u_0, u_1)(x) = (\hat{u}_0, \hat{u}_1)(x) \quad \textit{pour } |x| \geq R.$$

Soit u *et* $\hat{u}$ *les solutions de l'équation* (1.1) *pour la donnée initiale* (u_0, u_1) *et* $(\hat{u}_0, \hat{u}_1)$ *respectivement, définies sur l'intervalle* I*. Alors*

$$u(t,x) = \hat{u}(t,x) \quad \textit{pour } |x| \geq R + |t|. \tag{2.20}$$

Démonstration. On évoque la démonstration de la Proposition 2.2. Soit $\Gamma \subset X \times X$ l'ensemble des paires de fonctions $w, \hat{w}$ qui vérifient (2.20). C'est un sous ensemble fermé. La définition de Φ avec la Formule de Kirchhoff montrent que

$$(w, \hat{w}) \in \Gamma \Rightarrow (\Phi(w), \hat{\Phi}(\hat{w})) \in \Gamma \Rightarrow (\Phi^n(w), \hat{\Phi}^n(\hat{w})) \in \Gamma \quad \forall n.$$

Évidemment $(0,0) \in \Gamma$, donc aussi $(u, \hat{u}) = \lim_{n \to +\infty} (\Phi^n(0), \hat{\Phi}^n(0)) \in \Gamma$. $\square$

On aura également besoin d'une formule spécifique pour les solutions radiales.

Proposition 2.17 (cf. [Evans], p. 69)**.** *Soit* $w = w(t, |x|)$ *une solution radiale de* (2.19)*. Alors il existe une fonction* $g \in \dot{H}^1(\mathbb{R})$*, telle que*

$$rw(t, |r|) = (g(t+r) - g(t-r)) \, .$$

Chapitre 3

Théorie globale I

3.1. Décomposition en profils linéaires

Définition 3.1. Soit (u_{0n}, u_{1n}) une suite bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$ et soit U_{L}^j, $j \geq 1$, solutions de (2.19). On dit que (u_{0n}, u_{1n}) a une *décomposition en profils* U_{L}^j avec des paramètres $t_{j,n}$, $\lambda_{j,n}$ si

$$\forall j \neq j' \qquad \frac{\lambda_{j,n}}{\lambda_{j'n}} + \frac{\lambda_{j'n}}{\lambda_{j'n}} + \frac{|t_{j,n} - t_{j'n}|}{\lambda_{j,n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

et

$$(u_{0n}, u_{1n}) = \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{1}{\lambda_{j,n}^{1/2}} U_{\mathrm{L}}^j \left(-\frac{t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{\cdot}{\lambda_{j,n}} \right), \frac{1}{\lambda_{j,n}^{3/2}} \partial_t U_{\mathrm{L}}^j \left(-\frac{t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{\cdot}{\lambda_{j,n}} \right) \right) + (w_{0n}^J, w_{1n}^J),$$

où

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|S(t)(w_{0n}^J, w_{1n}^J)\|_{S(\mathbb{R})} = 0. \tag{3.1}$$

On appelle U_{L}^j les *profils linéaires.* Il est parfois commode de noter

$$U_{\mathrm{L},n}^j(t,x) := \frac{1}{\lambda_{j,n}^{1/2}} U_{\mathrm{L}}^j \left(\frac{t - t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{x}{\lambda_{j,n}} \right)$$

et

$$w_n^J(t,x) := S(t)(w_{0n}^J, w_{1n}^J).$$

Théorème 3.2 (cf. [BG99])**.** *De toute suite bornée de fonctions radiales $(u_{0n}, u_{1n}) \in \dot{H}^1 \times L^2$ on peut extraire une sous-suite qui admet une décomposition en profils.*

Notons le fait suivant :

Proposition 3.3. *Soit (w_{0n}, w_{1n}) une suite bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$. Alors*

$$\|w_n\|_{S(\mathbb{R})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$$
$$\forall \lambda_n, t_n, \quad \left(\lambda_n^{1/2} w_n(t_n, \lambda_n \cdot), \lambda_n^{3/2} \partial_t w_n(t_n, \lambda_n \cdot)\right) \rightharpoonup 0.$$

Démonstration. La norme de Strichartz est invariante par l'évolution temporelle et par rescaling, donc on peut supposer que $t_n = 0, \lambda_n = 1$. Si la conclusion n'est pas vraie, alors, après une extraction,

$$(w_n(0,\cdot), \partial_t w_n(0,\cdot)) \rightharpoonup (w_0, w_1) \neq 0.$$

Pourtant, par l'inégalité de Strichartz,

$$\dot{H}^1 \times L^2 \ni (w_0, w_1) \mapsto \|S(t)(w_0, w_1)\|_{S(\mathbb{R})}$$

est une fonction continue. Elle est aussi convexe, donc

$$0 < \|S(t)(w_0, w_1)\|_{S(\mathbb{R})} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|w_n\|_{S(\mathbb{R})} = 0,$$

une contradiction. □

Le point essentiel de la démonstration du Théorème 3.2 est que l'on a aussi l'implication réciproque.

Proposition 3.4. *Soit (w_{0n}, w_{1n}) une suite bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$. Alors*

$$\forall \lambda_n, t_n \quad \left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}} w_n\left(\frac{t_n}{\lambda_n}, \frac{\cdot}{\lambda_n}\right), \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} w_n\left(\frac{t_n}{\lambda_n}, \frac{\cdot}{\lambda_n}\right)\right) \rightharpoonup 0 \Rightarrow$$
$$\|w_n\|_{S(\mathbb{R})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les Propositions 3.3 et 3.4 donnent une métrisation de la "convergence faible à des symétries près" des suites bornées dans $\dot{H}^1 \times L^2$. Le choix de la norme $S(\mathbb{R})$ est arbitraire et toute autre norme de Strichartz convient (à l'exception possible des normes "end-point"). En particulier toutes ces normes décrivent la même topologie sur les ensembles bornés dans $\dot{H}^1 \times L^2$.

Admettons la Proposition 3.4 et esquissons la démonstration du Théorème 3.2. Cette démonstration suit un schéma général dont il est difficile de tracer l'origine. Il a été repris par de différents auteurs pour établir des théorèmes de décomposition dans le régime sous-critique, critique stationnaire et pour les normes de Strichartz, dans le cas radiale et non radiale, pour l'équation des ondes et pour l'équation de Schrödinger, ...

Démonstration du Théorème 3.2. . Soit

$$\rho_0 \colon \dot{H}^1 \times L^2 \to \mathbb{R}_+$$

une norme qui métrise la convergence faible sur les ensembles bornés dans $\dot{H}^1 \times L^2$. On suppose sans restreindre la généralité que $\rho_0((v_0, v_1)) \leq \|(v_0, v_1)\|_{\dot{H}^1\times L^2}$ pour tout $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$. Soit $v(t) = S(t)(v_0, v_1)$. On définit la norme ρ par

$$\rho((v_0, v_1)) := \sup_{t\in\mathbb{R}, \lambda>0} \rho_0((\lambda^{1/2} v(t, \lambda\,\cdot), \lambda^{3/2} \partial_t v(t, \lambda\,\cdot)).$$

Soit $(v_{0n}, v_{1n})_n$ une suite bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$. On définit

$$\eta\big((v_{0n}, v_{1n})_n\big) := \limsup_{n\to\infty} \rho((v_{0n}, v_{1n})).$$

On extrait les profils U^j_{L} et les suites de paramètres $(t_{j,n}, \lambda_{j,n})$ par récurrence, en gardant les invariants suivants (3.2), (3.3) et (3.4).

$$\text{Les suites } (t_{j,n}, \lambda_{j,n}) \text{ et } (t_{k,n}, \lambda_{k,n}) \text{ sont orthogonaux pour } j, k \in \{1, \ldots, J\}, j \neq k. \tag{3.2}$$

Soit (w^J_{0n}, w^J_{1n}) comme dans la Définition 3.1. Alors

$$j \leq J \Rightarrow \Big(\lambda^{1/2}_{j,n} w^J_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\cdot), \lambda^{3/2}_{j,n}\partial_t w^J_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\cdot)\Big) \rightharpoonup 0, \tag{3.3}$$

$$\|(U^J_0, U^J_1)\|_{\dot H^1\times L^2} \geq \frac{1}{2}\eta\big((w^{J-1}_n)_n\big). \tag{3.4}$$

On adopte la convention $(w^{-1}_{0n}, w^{-1}_{1n}) = 0$, $(w^0_{0n}, w^0_{1n}) = (u_{0n}, u_{1n})$. Les conditions (3.2), (3.3) et (3.4) sont triviales pour $J = 0$.

Soit $J > 0$. Si $\eta\big((w^{J-1}_n)_n\big) = 0$, on pose $U^J_{\mathrm{L}} = U^{J+1}_{\mathrm{L}} = \cdots = 0$. Dans le cas contraire, par définition de η et de ρ, il existe des suites $t_{J,n}, \lambda_{J,n}$ telles que, après extraction d'une sous-suite,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_0\big(\lambda^{1/2}_{J,n} w^{J-1}_n(t_{J,n}, \lambda_{J,n}\,\cdot), \lambda^{3/2}_{J,n}\partial_t w^{J-1}_n(t_{J,n}, \lambda_{J,n}\,\cdot)\big) \geq \frac{1}{2}\eta\big((w^{J-1}_n)_n\big).$$

Encore après une extraction on obtient

$$\big(\lambda^{1/2}_{J,n} w^{J-1}_n(t_{J,n}, \lambda_{J,n}\,\cdot), \lambda^{3/2}_{J,n}\partial_t w^{J-1}_n(t_{J,n}, \lambda_{J,n}\,\cdot)\big) \rightharpoonup (U^J_0, U^J_1) \neq 0$$

et on pose $U^J_{\mathrm{L}}(t) = S(t)(U^J_0, U^J_1)$.

Supposons que la suite $(t_{J,n}, \lambda_{J,n})$ n'est pas orthogonale à la suite $(t_{j,n}, \lambda_{j,n})$ pour certain $j \leq J - 1$. Or, par (3.3) on voit que

$$\big(\lambda^{1/2}_{j,n} w^{J-1}_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\,\cdot), \lambda^{3/2}_{j,n}\partial_t w^{J-1}_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\,\cdot)\big) \rightharpoonup 0.$$

Si les suites $(t_{j,n}, \lambda_{j,n}$ et $(t_{J,n}, \lambda_{J,n})$ étaient comparables, on aurait $(U^J_0, U^J_1) = 0$, donc une contradiction.

Comme ρ_0 métrise la convergence faible, on déduit facilement (3.4) :

$$\|(U^J_0, U^J_1)\|_{\dot H^1\times L^2} \geq \rho_0((U^J_0, U^J_1)) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \rho_0\big(\lambda^{1/2}_{J,n} w^{J-1}_n(t_{J,n}, \lambda_{J,n}\,\cdot), \lambda^{3/2}_{J,n}\partial_t w^{J-1}_n(t_{J,n}, \lambda_{J,n}\,\cdot)\big) \geq \frac{1}{2}\eta\big((w^{J-1}_n)_n\big).$$

Pour montrer finalement (3.3), on observe que

$$(w^J_{0n}, w^J_{1n}) = (w^{J-1}_{0n}, w^{J-1}_{1n}) - (U^J_{\mathrm{L},n}(0), \partial_t U^J_{\mathrm{L},n}(0)).$$

Pour $j = J$ on obtient (3.3) par définition de U^J. Pour $j < J$, on utilise l'hypothèse de récurrence pour le premier terme et pour le deuxième l'affirmation suivante, que l'on admettra.

Lemme 3.5. *Soit* (t_n, λ_n) *une suite orthogonale à la suite constante* $(0, 1)$*. Soit* $(v_0, v_1) \in \dot H^1 \times L^2$ *et* $v_{\mathrm{L}}(t) := S(t)(v_0, v_1)$*. Alors*

$$\big(\lambda^{1/2}_n v_{\mathrm{L}}(t_n, \lambda_n\,\cdot), \lambda^{3/2}_n \partial_t v_{\mathrm{L}}(t_n, \lambda_n\,\cdot)\big) \rightharpoonup 0.$$

La récurrence est terminée. En utilisant (3.3) on obtient facilement

$$\|u_{0,n}\|_{\dot{H}^1}^2 = \sum_{j=1}^{J} \left\| U_{\mathrm{L}}^j \left(\frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \right) \right\|_{\dot{H}^1}^2 + \|w_{0,n}^J\|_{\dot{H}^1}^2 + o_n(1), \tag{3.5}$$

$$\|u_{1,n}\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{J} \left\| \partial_t U_{\mathrm{L}}^j \left(\frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \right) \right\|_{L^2}^2 + \|w_{1,n}^J\|_{L^2}^2 + o_n(1). \tag{3.6}$$

En particulier $\|(U_0^J, U_1^J)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \to 0$, donc par (3.4) on a que $\eta\big((w_n^J)_n\big) \to 0$ quand $J \to \infty$. Les Propositions 3.3 et 3.4 affirment que si (w_{0n}, w_{1n}) est une suite bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$, alors

$$\|S(t)(w_{0n}, w_{1n})\|_{S(\mathbb{R})} \to 0 \Leftrightarrow \rho((w_{0n}, w_{1n})) \to 0.$$

On obtient donc (3.1), ce qui termine la preuve. □

Remarque 3.6. Notons par la future référence la conséquence suivante de la preuve.

$$\Big(\lambda_{j,n}^{1/2} v_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\cdot), \lambda_{j,n}^{3/2} \partial_t v_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\cdot)\Big) \rightharpoonup \Big(U_{\mathrm{L}}^j(0), \partial_t U_{\mathrm{L}}^j(0)\Big) \tag{3.7}$$

Remarque 3.7. En extrayant encore une fois on peut supposer que pour tout j, on est dans l'un des cas suivants :

$$\begin{aligned} &\forall_n t_{j,n} = 0 && \textit{onde centrée}, \\ &\frac{t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty && \textit{onde entrante}, \\ &\frac{t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty && \textit{onde sortante}. \end{aligned}$$

Remarque 3.8. On peut supposer que la suite des paramètres du premier profil (t_{1n}, λ_{1n}) est une sous-suite d'une suite donnée. En effet, il suffit de *définir* (U_0^j, U_1^j) comme la limite faible (d'une sous-suite) de $\Big(\lambda_{j,n}^{1/2} v_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\cdot), \lambda_{j,n}^{3/2} \partial_t v_n(t_{j,n}, \lambda_{j,n}\cdot)\Big)$ (où de prendre une décomposition quelconque et chercher la suite de paramètres non orthogonale à la suite donnée). De même, on peut supposer que les paramètres pour $j = 1, \dots, J$ sont des sous-suites de certaines suites données, pourvu que ces suites soient orthogonales.

Pour $R > 0$ et $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ radial on introduit la notation $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1) = \Psi_R(u_0, u_1)$ avec

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}_0(r) = u_0(r), \quad \widetilde{u}_1(r) = u_1(r) && \text{pour } r \geq R \\ &\widetilde{u}_0(r) = u_0(R), \quad \widetilde{u}_1(r) = 0 && \text{pour } r \leq R. \end{aligned}$$

Proposition 3.9. *Les opérateurs Ψ_R sont continus pour la norme $\|S(t)(\cdot)\|_{S(\mathbb{R})}$ et ont tous la même norme.*

Démonstration. Ψ_R et Ψ_1 sont conjugés par une dilatation (qui préserve la norme considérée), donc ils ont la même norme (éventuellement $+\infty$).

Soit $\Psi = \Psi_1$. Pour montrer la continuité de Ψ on utilisera les Propositions 3.3 et 3.4.

Il existe une fonction g_n telle que $\dot{g}_n \in L^2(\mathbb{R})$ et $w_n(t,r) = \frac{1}{r}(g_n(t+r) - g_n(t-r))$. En plus,

$$\forall t_n, \lambda_n \quad \dot{g}_n(\lambda_n r + t_n) \rightharpoonup 0.$$

Soit $\widetilde{w}_n(t) = S(t)\,(\Psi\overrightarrow{w_n}) = \frac{1}{r}(\widetilde{g}_n(t+r) - \widetilde{g}_n(t-r))$. On observe que

$$\widetilde{g}_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } |x| \leq 1, \\ \text{linéaire} & \text{pour } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On se ramène alors à un lemme élémentaire.

Lemme 3.10. *Soit $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $I_n \subset \mathbb{R}$ des intervalles. Soit*

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & si\ x \notin I_n, \\ \dfrac{1}{|I_n|}\displaystyle\int_{I_n} u_n dx & si\ x \in I_n. \end{cases}$$

Alors $\widetilde{u}_n \rightharpoonup 0$.

La preuve de ce lemme consiste à considérer une sous-suite pour laquelle les bornes des intervalles convergent. □

Le lemme suivant est une conséquence du Principe de Huyghens. On omet la preuve.

Lemme 3.11. *Si $\lim_{n\to\infty} \frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} = \pm\infty$, alors*

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\left||x|-|t_{j,n}|\right| \geq R\lambda_{j,n}} |\nabla U^j_{\mathrm{L},n}(0)|^2 + \frac{1}{|x|^2}|U^j_{\mathrm{L},n}(0)|^2 + |\partial_t U^j_{\mathrm{L},n}(0)|^2 dx = 0.$$

Si $t_{j,n} = 0$, alors

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\substack{\{|x|\geq R\lambda_{j,n}\} \\ \cup\{|x|\leq \frac{1}{R}\lambda_{j,n}\}}} |\nabla U^j_{\mathrm{L},n}(0)|^2 + \frac{1}{|x|^2}|U^j_{\mathrm{L},n}(0)|^2 + |\partial_t U^j_{\mathrm{L},n}(0)|^2 dx = 0.$$

3.2. Profils non linéaires

Définition 3.12. Soit U^j_{L} un profil linéaire. On définit un *profil non linéaire* associé à U^j_{L} comme l'unique solution U^j du problème (1.1) telle que

$$\left\| \overrightarrow{U}^j\left(\frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) - \overrightarrow{U}^j_{\mathrm{L}}\left(\frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) \right\|_{\dot{H}^1\times L^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque 3.13. Si $t_{j,n} = 0$, l'existence du profil non linéaire est claire. Dans le cas contraire, il faut résoudre en “problème de Cauchy à l'infini”. Supposons par exemple que $-\frac{t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \to +\infty$. Pour construire U^j on peut soit faire un raisonnement similaire à la deuxième partie de la preuve du Corollaire 2.7, soit refaire la démonstration de la Proposition 2.2 avec une petite modification : au lieu de Φ, il faut considérer l'application

$$\Phi'(u) := S(t)(U_0, U_1) + \int_t^{+\infty} \frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}\left(u(s)^5\right) ds$$

sur l'intervalle $I = [T_0, +\infty[$ où T_0 est tel que $\|S(t)(U_0,U_1)\|_{S(I)} \leq \delta_0$. Le point fixe U vérifie alors l'équation intégrale

$$U(t) = S(t)(U_0, U_1) + \int_t^{+\infty} \frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}\left(U(s)^5\right) ds,$$

donc

$$U(t)-U_{\mathrm{L}}(t)=\int_t^{+\infty}\frac{\sin((t-s)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}\big(U(s)^5\big)\,ds\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\text{dans }\dot H^1\times L^2.$$

La version du théorème suivant pour l'équation défocalisant a été démonstré dans [BG99]. La démonstration que l'on fournit ici est proche de la preuve originale.

Théorème 3.14. *Soit $\theta_n\in[0,+\infty[$. On suppose que pour tout j*

$$\forall j\geq 1,\quad\forall n,\ \frac{\theta_n-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}<T_+(U^j)\ \ et\ \limsup_{n\to+\infty}\left\|U^j\right\|_{S\left(\left[\frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}},\frac{\theta_n-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right]\right)}<+\infty.\tag{3.8}$$

Soit u_n la solution du problème (1.1) *pour des données initiales $(u_{0,n},u_{1,n})$. Alors, pour n grand, u_n est défini sur l'intervalle $t\in[0,\theta_n]$,*

$$\limsup_{n\to+\infty}\|u_n\|_{S([0,\theta_n])}<+\infty,\tag{3.9}$$

et

$$\forall t\in[0,\theta_n],\quad u_n(t,x)=\sum_{j=1}^J U_n^j(t,x)+w_n^J(t,x)+r_n^J(t,x),\tag{3.10}$$

où $w_n^J(t)=S(t)\left(w_{0,n}^J,w_{1,n}^J\right)$ et

$$\lim_{J\to+\infty}\left[\limsup_{n\to+\infty}\|r_n^J\|_{S([0,\theta_n])}+\sup_{t\in[0,\theta_n]}\left(\|\nabla r_n^J(t)\|_{L^2}+\|\partial_t r_n^J(t)\|_{L^2}\right)\right]=0.\tag{3.11}$$

Remarque 3.15. En exploitant la réversibilité temporelle de l'équation (1.1), un théorème analogue peut être formulé pour $\theta_n\leq 0$.

Démonstration. (Basée sur [DKM1], démonstration de la Proposition 2.8.) On définit

$$\widetilde{u}_n^J(t,x):=\sum_{j=1}^J U_n^j(t,x)+w_n^J(t,x).$$

De la définition d'un profil non linéaire on déduit que, pour J fixé,

$$\lim_{n\to\infty}\|\overrightarrow{\widetilde{u}}_n^J(0,x)-\overrightarrow{u}_n^J(0,x)\|_{\dot H^1\times L^2}=0.$$

La preuve consiste à estimer l'erreur $e_n^J:=\partial_t^2\widetilde{u}_n^J-\Delta_x\widetilde{u}_n^J-(\widetilde{u}_n^J)^5$. Une fois ceci accompli, le Lemme de Perturbation (Théorème 2.11) donnera la conclusion.

D'abord, un calcul standard montre que, pour J fixé,

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^J U_n^j(t,x)\Big)^5-\sum_{j=1}^J U_n^j(t,x)^5\Big\|_{N([0,\theta_n])}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\tag{3.12}$$

Par (3.5) et (3.6) on voit que $\|(U_0^j,U_1^j)\|_{\dot H^1\times L^2}$ tend vers 0 pour j grand. Par conséquent, il existe J_0 tel que

$$\forall j>J_0\qquad\|U^j\|_{S(\mathbb{R})}\leq 4\|(U_0^j,U_1^j)\|_{\dot H^1\times L^2}$$

(cf. (2.11)). Il s'ensuit que

$$\lim_{J_0\to\infty}\Big[\sum_{j=J_0+1}^{\infty}\|U^j\|^5_{S(\mathbb{R})}\Big]=0. \tag{3.13}$$

Or, par l'hypothèse,

$$\limsup_{n\to+\infty}\|U^j_n\|_{S([0,\theta_n])}<+\infty \quad \text{pour } j=1,\dots,J_0.$$

De ce fait, (3.12) donne l'existence d'une constante $M\geq 0$ telle que pour tout J

$$\limsup_{n\to+\infty}\|\widetilde{u}^J_n\|_{S([0,\theta_n])}\leq M<+\infty. \tag{3.14}$$

Rappelons que par définition U^j_n vérifie l'équation (1.1), donc un calcul simple montre que

$$e^J_n=\sum_{j=1}^{J}(U^j_n)^5-\Big(\sum_{j=1}^{J}U^j_n+w^J_n\Big)^5. \tag{3.15}$$

Le but est de démontrer que

$$\lim_{J\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\big\|e^J_n\big\|_{N([0,\theta_n])}=0.$$

Une manipulation algébrique donne

$$\begin{aligned}\big\|e^J_n\big\|_{N([0,\theta_n])}\leq C\Bigg[&\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{J}U^j_n(t,x)\Big)^5-\sum_{j=1}^{J}U^j_n(t,x)^5\Big\|_{N([0,\theta_n])}+\|w^J_n\|^5_{S([0,\theta_n])}+\\&+\|w^J_n\|_{S([0,\theta_n])}\Big\|\sum_{j=1}^{J}U^j_n\Big\|^4_{S([0,\theta_n])}\Bigg].\end{aligned}$$

La conclusion découle de (3.12), (3.14) et de (3.1). □

Proposition 3.16. *Soit V^j_{L} des solutions de* (2.19), *$t_{j,n},\lambda_{j,n}$ des suites orthogonales et supposons que $\widetilde{w}^J_n$ vérifie* (3.1). *Soit $0\leq\rho_n<\sigma_n\leq+\infty$. Alors*

$$j\neq k\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_n\leq|x|\leq\sigma_n}\Big(\nabla V^j_{\mathrm{L},n}(0,x)\cdot\nabla V^k_{\mathrm{L},n}(0,x)+\partial_t V^j_{\mathrm{L},n}(0,x)\cdot\partial_t V^k_{\mathrm{L},n}(0,x)\Big)\,dx=0 \tag{3.16}$$

$$J\geq j\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_n\leq|x|\leq\sigma_n}\Big(\nabla V^j_{\mathrm{L},n}(0,x)\cdot\nabla\widetilde{w}^J_n(0,x)+\partial_t V^j_{\mathrm{L},n}(0,x)\cdot\partial_t\widetilde{w}^J_{\mathrm{L},n}(0,x)\Big)\,dx=0. \tag{3.17}$$

Remarque 3.17. Ce résultat est plus fort que (3.5) et (3.6). La démonstration repose sur un calcul fastidieux à l'aide de la formule explicite de la Proposition 2.17. On l'omettra.

Proposition 3.18. *Soit $(u_{0,n},u_{1,n})$, U^j_n, w^J_n, $t_{j,n},\lambda_{j,n}$ et $\theta_n\in\mathbb{R}$ comme dans le Théorème 3.14. Soit $0\leq\rho_n<\sigma_n\leq+\infty$. Alors*

$$j\neq k\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_n\leq|x|\leq\sigma_n}\Big(\nabla U^j_n(\theta_n,x)\cdot\nabla U^k_n(\theta_n,x)+\partial_t U^j_n(\theta_n,x)\cdot\partial_t U^k_n(\theta_n,x)\Big)\,dx=0 \tag{3.18}$$

$$J\geq j\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_n\leq|x|\leq\sigma_n}\big(\nabla U^j_n(\theta_n,x)\cdot\nabla w^J_n(\theta_n,x)+\partial_t U^j_n(\theta_n,x)\cdot\partial_t w^J_n(\theta_n,x)\big)\,dx=0. \tag{3.19}$$

Démonstration. Pour se ramener à la Proposition précédente il suffit de construire, pour tout j, un profil linéaire V_{L}^j tel que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \overrightarrow{U}_n^j(\theta_n) - \overrightarrow{V}_{\mathrm{L},n}^j(\theta_n) \right\|_{\dot{H}^1\times L^2} = 0,$$

où, comme d'habitude, $V_{\mathrm{L},n}^j(t,x) = \frac{1}{\lambda_{j,n}^{1/2}} V_{\mathrm{L}}^j\left(\frac{t-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{x}{\lambda_{j,n}}\right)$. En effet, il suffit ensuite de remplacer $t_{j,n}$ par $t_{j,n} - \theta_n$ (ce qui préserve l'orthogonalité).

Après extraction d'une sous-suite on peut supposer que $\frac{\theta_n - t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \to t_0 \in [-\infty, +\infty]$. Si $t_0 = +\infty$, alors U^j disperse pour les temps positifs. En effet, si $\frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \to +\infty$, c'est clair par la définition d'un profil non linéaire. Dans le cas contraire on utilise (3.8) et le critère de dispersion (Corollaire 2.7). Donc il existe V_{L}^j tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \overrightarrow{U}^j(t) - \overrightarrow{V}_{\mathrm{L}}^j(t) \right\|_{\dot{H}^1\times L^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| \overrightarrow{U}_n^j(\theta_n) - \overrightarrow{V}_{\mathrm{L},n}^j(\theta_n) \right\|_{\dot{H}^1\times L^2} = 0.$$

Le cas $t_0 = -\infty$ est identique. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, on définit V_{L}^j comme la solution de l'équation (2.19) pour la donnée initiale $\overrightarrow{U}^j(t_0)$ en temps t_0. □

3.3. Borne sur la norme critique

Proposition 3.19. *Soit $\overrightarrow{u}$ une solution de* (1.1) *définie pour $t \in [0, +\infty[$. Alors*

$$\liminf_{t\to+\infty} \|\overrightarrow{u}(t)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \leq 3E(u_0, u_1).$$

Démonstration. Pour simplifier la démonstration, on va supposer que $u_0 \in L^2$. On pose $y(t) := \int_{\mathbb{R}^3} |u(t,x)|^2 dx$. Un simple calcul montre que

$$y'(t) = 2\int_{\mathbb{R}^3} u\partial_t u, \tag{3.20}$$

$$y''(t) = 2\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\partial_t u|^2 - |\nabla_x u|^2 + |u|^6\right). \tag{3.21}$$

Si

$$(1-\delta)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x u|^2 + |\partial_t u|^2 \geq 3E(u_0, u_1) + \delta,$$

alors

$$y''(t) \geq 4(1+\delta)\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t u|^2 + 4\delta.$$

Alors pour t grand $y'(t) > 0$. Par Cauchy-Schwarz, $y''y \geq (1+\delta)(y')^2$, donc $y'y^{-1-\delta}$ est croissante, en particulier $-\delta y^{-1-\delta}y' \leq -\varepsilon < 0$ pour t assez grand. Mais c'est la dérivée de la fonction positive $y^{-\delta}$, une contradiction. □

3.4. Extraction de la partie linéaire

Proposition 3.20. *Soit u une solution de* (1.1) *définie pour $t \in [0, +\infty[$. Alors il existe v_{L}, une solution du problème linéaire, tel que pour tout $A > 0$*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t-A} |\nabla(u(t) - v_{\mathrm{L}}(t))|^2 + |\partial_t(u(t) - v_{\mathrm{L}}(t))|^2\, dx \to 0.$$

Remarque 3.21. Il est facile de voir que

$$\forall_{A>0} \lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t-A} |\nabla w_{\mathrm{L}}(t)|^2 + |\partial_t w_{\mathrm{L}}(t)|^2\, dx \to 0 \Longrightarrow w_{\mathrm{L}} \equiv 0.$$

Donc v_{L} est unique.

Démonstration. Étape 1 : A fixé. On va montrer que pour tout $A > 0$ il existe v_{L}^A, une solution du problème linéaire telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t-A} |\nabla(u(t) - v_{\mathrm{L}}^A(t))|^2 + |\partial_t(u(t) - v_{\mathrm{L}}^A(t))|^2\, dx = 0. \tag{3.22}$$

L'idée consiste à trouver une solution $\widetilde{u}$ de (1.1) qui disperse pour les temps positifs et telle que pour t grand et $|x| \geq t - A$ on ait $\widetilde{u}(t, x) = u(t, x)$. Cependant, il n'y a aucun espoir de pouvoir utiliser le critère de données petites.

Lemme 3.22. *Soit δ suffisamment petit. Alors il existe une suite $t_n \to +\infty$ telle que*

$$(u_{0n}, u_{1n}) := \Psi_{(1-\delta)|t_n|} \overrightarrow{u}(t_n)$$

a une décomposition en profils U_{L}^j avec des paramètres $t_{j,n}, \lambda_{j,n}$ ayant la propriété suivante :

$$\begin{aligned} &\forall j \geq 2 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} = +\infty, \\ &t_{1,n} = 0 \;\; et \;\; \|(U_0, U_1)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \;\; petit. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Admettons pour l'instant ce lemme et continuons la démonstration. Soit u_n la solution de (1.1) avec la donnée initiale $\Psi_{(1-\delta)t_n} \overrightarrow{u}(t_n)$. En vue du Théorème 3.14, u_n disperse pour les temps positifs, pour n assez grand. On prend un tel n et on suppose aussi que $\delta t_n > A$ (ce qui est vrai pour n grand). Alors, par la vitesse finie de propagation, $\widetilde{u}(t) := u_n(t - t_n)$ satisfait nos exigences.

Étape 2 : Fin de la démonstration. Soit $t_n \to +\infty$ la suite donnée par la Proposition 3.19. On considère la décomposition en profils de la suite $(u_{0n}, u_{1n}) := \overrightarrow{u}(t_n)$ avec $(t_{1,n}, \lambda_{1,n}) = (-t_n, 1)$ (cf. Remarque 3.8). On pose $v_{\mathrm{L}} := U_{\mathrm{L}}^1$. Soit $A > 0$. La suite $(u_{0n}, u_{1n}) := u(t_n) - v_{\mathrm{L}}^A(t_n)$ a une décomposition en profils avec le premier profil $U_{\mathrm{L}}^1 = v_{\mathrm{L}} - v_{\mathrm{L}}^A$ et les paramètres $t_{1n} = -t_n$, $\lambda_{1n} = 1$. Par la Proposition 3.16 on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq t_n-A} |\nabla(v_{\mathrm{L}}(t_n) - v_{\mathrm{L}}^A(t_n))|^2 + |\partial_t(v_{\mathrm{L}}(t_n) - v_{\mathrm{L}}^A(t_n))|^2\, dx = 0.$$

Grâce à la vitesse finie de propagation, cela entraîne immédiatement que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t-A} |\nabla(v_{\mathrm{L}}(t) - v_{\mathrm{L}}^A(t))|^2 + |\partial_t(v_{\mathrm{L}}(t) - v_{\mathrm{L}}^A(t))|^2\, dx = 0,$$

ce qui, comparé avec (3.22), finit la démonstration. □

Démonstration du Lemme 3.22. Étape 1. On va montrer qu'il existe une suite de temps $s_n \to +\infty$ telle que $\Psi_{(1-\delta')s_n}\overrightarrow{u}(s_n)$ se décompose en profils V_{L}^j avec des paramètres $s_{j,n}, \mu_{j,n}$ tels que

$$\forall j, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{-s_{j,n}}{\mu_{j,n}} = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|s_{j,n}|}{s_n} \in [1-\delta', 1],$$
$$s_{1,n} = 0 \quad \text{et} \quad \|(V_0^1, V_1^1)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \text{ petit.}$$

Soit s_n la suite de temps donnée par la Proposition 3.19. Supposons que la suite $\overrightarrow{u}(s_n)$ se décompose en profils $\widetilde{V}_{\mathrm{L}}^j$, avec les paramètres $s_{j,n}$, $\mu_{j,n}$. Considérons d'abord le cas $s_{j,n} = 0$, $\forall n$. On a trois possibilités :

a. $s_n \ll \mu_{j,n}$ – Impossible par le Lemme 3.11. En effet, en vue de la Proposition 3.16,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\geq s_n+R} |\nabla_x \widetilde{V}_{\mathrm{L},n}^j(0)|^2 + |\partial_t \widetilde{V}_{\mathrm{L},n}^j(0)|^2 dx = 0. \tag{3.24}$$

Alors, pour R, n grand, $\frac{1}{R}\mu_{j,n} < s_n + R$.

b. $\mu_{j,n} \ll s_n$ – alors $\Psi_{(1-\delta')s_n}\widetilde{V}_{\mathrm{L},n}^j(0) \to 0$ dans $\dot{H}^1 \times L^2$.

c. $\mu_{j,n} = s_n$ – Dans ce cas on obtient d'abord

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\geq 1+R/s_n} |\nabla_x \widetilde{V}_{\mathrm{L}}^j(0)|^2 + |\partial_t \widetilde{V}_{\mathrm{L}}^j(0)|^2 dx = 0,$$

donc

$$\mathrm{supp}(\widetilde{V}_0^1, \widetilde{V}_1^1) \subset \{|x| \leq 1\}.$$

Soit $(V_0^1, V_1^1) := \Psi_{1-\delta'}(\widetilde{V}_0^1, \widetilde{V}_1^1)$. Ce profil est petit si δ est petit.

Maintenant soit $\mu_{j,n} \ll s_{j,n}$. Par le Lemme 3.11 on obtient $s_n + R > |s_{j,n}| - R\mu_{j,n}$ pour R grand. Alors $\lim \frac{|s_{j,n}|}{s_n} \leq 1$. Il est facile de voir que si cette limite est $< 1-\delta'$ alors, toujours par le Lemme 3.11, $\Psi_{(1-\delta')s_n}\widetilde{V}_{\mathrm{L},n}^j(0) \to 0$ dans $\dot{H}^1 \times L^2$. En effet, dans ce cas il suffit de remarquer que, quel que soit R, pour n grand on aura $|s_{j,n}| + R\mu_{j,n} < (1-\delta')s_n$.

Encore une fois par le Lemme 3.11 on a $\Psi_{(1-\delta')s_n}\widetilde{V}_{\mathrm{L},n}^j(0) - V_{\mathrm{L},n}^j(0) \to 0$ dans $\dot{H}^1 \times L^2$ où on a posé simplement $V_{\mathrm{L},n}^j(0) = \widetilde{V}_{\mathrm{L},n}^j(0)$. Cela termine l'étape 1.

Étape 2. On souhaite avoir des solutions dispersant pour les temps positifs, donc il ne nous reste plus qu'à trouver un moyen d'éliminer le mauvais signe de $s_{j,n}$.

Soit u_n la solution de (1.1) pour les données initiales $\Psi_{(1-\delta)s_n}\overrightarrow{u}(s_n)$. Par le Théorème 3.14 on peut écrire :

$$\overrightarrow{u}_n\left(\frac{s_n}{2}\right) = \sum_{j=1}^{J} \overrightarrow{V}_n^j\left(\frac{s_n}{2}\right) + \overrightarrow{w}_n^J\left(\frac{s_n}{2}\right) + \overrightarrow{r}_n^J\left(\frac{s_n}{2}\right).$$

Observons que

$$\overrightarrow{V}_n^j\left(\frac{s_n}{2}\right) = \frac{1}{\mu_{j,n}^{1/2}} V_L^j\left(\frac{s_n/2 - s_{j,n}}{\mu_{j,n}}, \frac{x}{\mu_{j,n}}\right) + o(1).$$

On pose $\delta = \frac{2}{3}\delta'$. On vérifie facilement que

$$|x| \geq (1-\delta)t_n \Rightarrow \overrightarrow{u}_n(s_n/2, x) = \overrightarrow{u}(t_n, x).$$

Or, si s_n et $s_{j,n}$ sont du même signe, alors

$$\Psi_{(1-\delta)t_n} \overrightarrow{V}_n^j \left(\frac{s_n}{2}\right) \to 0.$$

Les autres profils sont traités comme avant, et pour w_n^J on fait usage de la Proposition 3.9. $\square$

Chapitre 4

Caractérisation dynamique des solitons

4.1. Énoncés des résultats

Le principe informel (1.8) est précisé dans les deux propositions suivantes.

Proposition 4.1. *Soit u une solution radiale non nulle du problème* (1.1). *Supposons que pour tout $\lambda > 0$ les fonctions $(u_0 + W_\lambda, u_1)$, $(u_0 - W_\lambda, u_1)$ ne sont pas à support compact. Alors il existe $R > 0$, $\eta > 0$ et une solution radiale globale $\widetilde{u}$ de* (1.1) *qui disperse pour $t \to \pm\infty$ et telle que*

$$(\widetilde{u}(x), \partial_t \widetilde{u}(x)) = (u(x), \partial_t u(x)) \text{ pour } |x| > R + |t|, \tag{4.1}$$

et que pour $t \leq 0$ ou pour $t \geq 0$

$$\int_{|x|>R+|t|} |\nabla \widetilde{u}(t,x)|^2 + (\partial_t \widetilde{u}(t,x))^2 \, dx \geq \eta. \tag{4.2}$$

Proposition 4.2. *Soit R_0 une constante suffisamment grande. Soit u une solution radiale du problème* (1.1) *telle que $(h_0, h_1) := (u_0 - W, u_1)$ ou $(h_0, h_1) := (u_0 + W, u_1)$ a un support compact. Alors*

a. Il existe une solution $\breve{u}$, définie pour $t \in [-R_0, R_0]$, et $R' \in]0, \rho(h_0, h_1)[$ tels que

$$(\breve{u}(x), \partial_t \breve{u}(x)) = (u(x), \partial_t u(x)) \text{ pour } x > R' + |t| \tag{4.3}$$

et que pour $t \in [0, R_0]$ ou pour $t \in [-R_0, 0]$

$$\rho\big(\breve{u}(t) \pm W, \partial_t \breve{u}(t)\big) = \rho(h_0, h_1) + |t| \tag{4.4}$$

b. Supposons en plus que $\rho(h_0, h_1) > R_0$. Alors il existe $R < \rho(h_0, h_1)$, $\eta > 0$ et une solution radiale globale de (1.1) *qui disperse pour $t \to \pm\infty$, et pour laquelle on a* (4.1) *et* (4.2).

La démonstration de ces résultats repose sur l'existence de canaux d'énergie pour des solutions de l'équation linéaire, ainsi que sur la théorie de Cauchy de petites données.

Proposition 4.3 (Canal d'énergie pour l'équation linéaire)**.** *Soit $\rho_0 \geq 0$, $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ (radial) et $u_{\mathrm{L}} = S(t)(u_0, u_1)$. Alors pour $t \geq 0$ ou pour $t \leq 0$:*

$$\int_{\rho_0+|t|}^{+\infty} \left[\partial_r(ru_{\mathrm{L}}(t,r))\right]^2 + \left[\partial_t(ru_{\mathrm{L}}(t,r))\right]^2 dr \geq \frac{1}{2}\int_{\rho_0}^{+\infty} \left[\partial_r(ru_0(r))\right]^2 + \left[ru_1(r)\right]^2 dr.$$

Démonstration. Soit f telle que $ru_L(t,r) = f(t+r) - f(t-r)$ pour $r > 0$. Alors

$$\int_{\rho_0}^{+\infty} \left[\partial_r(ru_0(r))\right]^2 + \left[ru_1(r)\right]^2 dr = 2\left(\int_{-\infty}^{-\rho_0} |\dot{f}(x)|^2\, dx + \int_{\rho_0}^{+\infty} |\dot{f}(x)|^2\, dx\right),$$

pour $t \geq 0$

$$\int_{\rho_0+|t|}^{+\infty} \left[\partial_r(ru_{\mathrm{L}}(t,r))\right]^2 + \left[\partial_t(ru_{\mathrm{L}}(t,r))\right]^2 dr \geq 2\left(\int_{-\infty}^{-\rho_0} |\dot{f}(x)|^2\, dx\right),$$

et pour $t \leq 0$

$$\int_{\rho_0+|t|}^{+\infty} \left[\partial_r(ru_{\mathrm{L}}(t,r))\right]^2 + \left[\partial_t(ru_{\mathrm{L}}(t,r))\right]^2 dr \geq 2\left(\int_{\rho_0}^{+\infty} |\dot{f}(x)|^2\, dx\right).$$

$\square$

Remarque 4.4.

$$\int_{\rho_0}^{+\infty} \left(\partial_r(rf)\right)^2\, dr = \int_{\rho_0}^{+\infty} (\partial_r f)^2 r^2\, dr - \rho_0 f(\rho_0)^2. \tag{4.5}$$

On va utiliser la notation $\|f\|_{\rho_0}^2 := 4\pi\left(\int_{\rho_0}^{+\infty} \left(\partial_r(rf)\right)^2 + \left(\partial_t(rf)\right)^2\, dr\right)$.

4.2. Théorie de Cauchy autour de W

Pour $\rho_0 \geq 0$ on définit V_{ρ_0} comme la solution de (1.1) pour les données initiales $(V_0, V_1) := \Psi_{\rho_0}(W, 0)$. Pour ρ_0 suffisamment grand, cette solution est globale et disperse.

Lemme 4.5. *Il existe t_0 et δ_0 tels que si $\rho_0 \geq 0$ et $\|(g_0, g_1)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \leq \delta_0$, alors pour $V = V_{\rho_0}$ le problème*

$$\begin{cases} \partial_t^2 g - \Delta_x g = 5V^4 g + 10V^3 g^2 + 10V^2 g^3 + 5V g^4 + g^5, & (t,x) \in [-t_0, t_0] \times \mathbb{R}^3 \\ (g, \partial_t g)_{\restriction t=0} = (g_0, g_1) \end{cases} \tag{4.6}$$

a une unique solution. En plus, si g_{L} est la solution du problème linéaire avec les mêmes données initiales, alors

$$\sup_{t\in[-t_0,t_0]} \|\overrightarrow{g} - \overrightarrow{g_{\mathrm{L}}}\|_{\dot{H}^1\times L^2} \leq \frac{1}{10}\|(g_0, g_1)\|_{\dot{H}^1\times L^2}.$$

Lemme 4.6. *Il existe R_0 et δ_0 tels que si $\rho_0 \geq R_0$ et $\|(g_0, g_1)\|_{\dot{H}^1\times L^2} \leq \delta_0$, alors pour $V = V_{\rho_0}$ le problème*

$$\begin{cases} \partial_t^2 g - \Delta_x g = 5V^4 g + 10V^3 g^2 + 10V^2 g^3 + 5V g^4 + g^5, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (g, \partial_t g)_{\restriction t=0} = (g_0, g_1) \end{cases} \tag{4.7}$$

a une unique solution. Cette solution disperse pour $t \to \pm\infty$. En plus, si g_{L} est la solution du problème linéaire avec les mêmes données initiales, alors

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\overrightarrow{g} - \overrightarrow{g_{\mathrm{L}}}\|_{\dot H^1\times L^2} \leq \frac{1}{10}\|(g_0, g_1)\|_{\dot H^1\times L^2}.$$

Remarque 4.7. Le cas $\rho_0 = +\infty$, c.-à-d. $V = 0$, n'est pas exclu.

Les démonstrations de ces lemmes suivent les lignes de la preuve de la Proposition 2.2. Pour estimer les termes $V^j g^k$ on utilise l'inégalité de Hölder.

4.3. Les preuves

Les démontrations des Propositions 4.2 et 4.1 s'appuient sur deux estimations.

Lemme 4.8. *Soit $\rho_0 \leq \rho$. Alors*

$$|\rho_0 f(\rho_0) - \rho f(\rho)|^2 \leq \frac{|\rho_0 - \rho|}{4\pi}\|f\|^2_{\rho_0}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition de $\|\cdot\|_{\rho_0}$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

Lemme 4.9. *Soit g comme dans le Lemme 4.5 ou 4.6. Alors, pour $t \leq 0$ ou $t \geq 0$,*

$$\int_{|x|\geq\rho_0+|t|} |\nabla_x g|^2 + |\partial_t g|^2\, dx \geq \frac{1}{5}\left(\|(g_0, g_1)\|^2_{\rho_0} - \rho_0 g_0(\rho_0)^2\right).$$

Démonstration. En utilisant la Proposition 4.3, on peut écrire, pour $t \geq 0$ ou $t \leq 0$,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\rho_0+|t|} |\nabla_x g|^2 + |\partial_t g|^2\, dx &\geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq\rho_0+|t|} |\nabla_x g_{\mathrm{L}}|^2 + |\partial_t g_{\mathrm{L}}|^2\, dx - \frac{1}{100}\|(g_0, g_1)\|^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{100}\right)\|(g_0, g_1)\|^2_{\rho_0} - \frac{4\pi}{100}\rho_0 g_0(\rho_0)^2 \\ &\geq \frac{1}{5}\left(\|(g_0, g_1)\|^2_{\rho_0} - \rho_0 g_0(\rho_0)^2\right).\end{aligned}$$

$\square$

Démonstration de la Proposition 4.2. Considérons $(\check u_0, \check u_1) := (W, 0) + \Psi_{R'}(h_0, h_1)$. Par la théorie de Cauchy, pour R' proche de $\rho(h_0, h_1)$, la solution $\check u$ est définie sur un intervalle aussi grand que l'on veut. Il est facile de voir qu'il suffit de démontrer la "propagation du support" sur un petit intervalle de temps, $[-t_0, t_0]$ par exemple.

L'idée est la suivante : prenons ρ_0 arbitrairement proche de $\rho(h_0, h_1)$, soit $(g_0, g_1) := \Psi_{\rho_0}(h_0, h_1)$, et soit g donné par le Lemme 4.5. On voit que $V + g$ satisfait (1.1), donc, par la vitesse de propagation,

$$|x| \geq \rho_0 + |t| \Rightarrow \overrightarrow{u}(t) = (W, 0) + \overrightarrow{g}(t). \tag{4.8}$$

Alors, il suffit de démontrer que, pour $t \in [-t_0, 0]$ ou pour $t \in [0, t_0]$,

$$\int_{|x|\geq\rho_0+|t|} |\nabla_x g(t)|^2 + |\partial_t g(t)|^2\, dx > 0.$$

Cela s'ensuit du Lemme 4.9, où le terme de bord est estimé à l'aide du Lemme 4.8.

Supposons maintenant que $\rho(h_0, h_1) > R_0$. On procède de façon similaire, c.-à-d. on prend $(g_0, g_1) := \Psi_{\rho_0}(h_0, h_1)$, où $\rho_0 > R_0$ est proche de $\rho(h_0, h_1)$. Ensuite, toutes les estimations restent les mêmes. $\square$

Remarque 4.10. Cette preuve donne aussi la conclusion de la Proposition 4.1 dans le cas où (u_0, u_1) est à support compact (cf. Remarque 4.2).

Démonstration de la Proposition 4.1. Psychologiquement, il est plus facile de démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.11. *Soit u solution de* (1.1) *telle que pour ρ_0 suffisamment grand on a*

$$\int_{|x|\geq \rho_0+|t|} |\nabla_x u(t)|^2 + |\partial_t u(t)|^2 \, dx \to 0 \qquad \text{pour } t \to \pm\infty. \tag{4.9}$$

Alors (u_0, u_1) est à support compact ou il existe $\lambda > 0$ et $\imath = \pm 1$ tels que $(u_0, u_1) - \imath(W_\lambda, 0)$ est à support compact.

Admettons ce lemme et finissons la démonstration.

Le cas où (u_0, u_1) est à support compact est déjà traité. Supposons donc que ce ne soit pas vrai. Mais le cas où $(u_0, u_1) - \imath(W_\lambda, 0)$ est à support compact est exclu par l'hypothèse, donc par le Lemme on obtient qu'il existe une suite croissante $t_n \to +\infty$ telle que

$$\int_{|x|\geq \rho_0+|t_n|} |\nabla_x u(t_n)|^2 + |\partial_t u(t_n)|^2 \, dx \geq \eta > 0.$$

Par le principe de Huyghens, la même inégalité est vraie pour tout t. $\square$

Le reste de cette section est consacré à la démonstration du Lemme 4.11.

Lemme 4.12. *Soit u solution globale de* (1.1) *telle que* (4.9) *et soit ρ_0 tel que*

$$\int_{|x|\geq \rho_0} \left(|\nabla_x u_0|^2 + |u_1|^2\right) \, dx \leq \delta \leq \delta_0, \tag{4.10}$$

où δ_0 suffisamment petit. Alors

$$\|(u_0, u_1)\|_{\rho_0}^2 \leq C_0 \rho_0^5 |u_0(\rho_0)|^{10}, \tag{4.11}$$

et pour $\rho_0 \leq \rho \leq 2\rho_0$,

$$|\rho_0 u_0(\rho_0) - \rho u_0(\rho)| \leq \sqrt{\frac{C_0}{4\pi}\rho_0^3 |u_0(\rho_0)|^5} \leq \sqrt{\frac{C_0}{4\pi}}\delta^2 |\rho_0 u_0(\rho_0)|. \tag{4.12}$$

Démonstration. En remplaçant (u_0, u_1) par $\Psi_{\rho_0}(u_0, u_1)$ on peut supposer que

$$\|(u_0, u_1)\|_{\dot H^1\times L^2} \leq \delta.$$

Ensuite, le raisonnement est similaire à la démonstration du Lemme 4.9, mais avec l'utilisation du Corollaire 2.10 au lieu du Lemme 4.5 ou 4.6. Pour $t \leq 0$ ou $t \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq \rho_0+|t|} |\nabla_x u|^2 + |\partial_t u|^2 \, dx &\geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq \rho_0+|t|} |\nabla_x u_{\mathrm{L}}|^2 + |\partial_t u_{\mathrm{L}}|^2 \, dx - C\|(u_0, u_1)\|_{\dot H^1\times L^2}^{10} \\ &\geq \frac{1}{4}\|(u_0, u_1)\|_{\rho_0}^2 - C\left(\|(u_0, u_1)\|_{\rho_0}^2 + 4\pi\rho_0 u_0(\rho_0)^2\right)^5,\end{aligned}$$

donc par l'hypothèse (4.9)

$$\|(u_0,u_1)\|_{\rho_0}^2 \le C\left(\|(u_0,u_1)\|_{\rho_0}^2 + 4\pi\rho_0 u_0(\rho_0)^2\right)^5 \le C'\left(\|(u_0,u_1)\|_{\rho_0}^{10} + (4\pi\rho_0)^5 u_0(\rho_0)^{10}\right),$$

d'où (4.11).

La première inégalité dans (4.12) est une conséquence de (4.11) et du Lemme 4.8. La deuxième vient du fait que

$$\rho_0 u(\rho_0)^2 \le \int_{|x|\ge\rho_0} \left(|\nabla_x u_0|^2 + |u_1|^2\right) dx$$

(cf. Lemme 4.8). □

Lemme 4.13. $\rho_0 u_0(\rho_0) \underset{\rho_0\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$. *En plus,* $|\rho_0 u_0(\rho_0) - l| = O(\rho_0^{-2})$.

Démonstration. Premièrement, (4.12) entraîne que

$$\forall \epsilon > 0 \quad |\rho_0 u_0(\rho_0)| = O(\rho_0^{\epsilon}).$$

Prenons par exemple $\epsilon = \frac{1}{5}$. On obtient de (4.12) que pour ρ_0 grand et $\rho_0 \le \rho \le 2\rho_0$ on a $|\rho_0 u_0(\rho_0) - \rho u_0(\rho)| \le C\rho_0^{-1}$. Comme la série $\sum_n 2^{-n}$ converge, on peut appliquer le critère de Cauchy.

Or, $|\rho_0 u(\rho_0)|$ est borné, donc pour $\rho_0 \le \rho \le 2\rho_0$ on a $|\rho_0 u_0(\rho_0) - \rho u_0(\rho)| \le C\rho_0^{-2}$, d'où

$$|\rho_0 u(\rho_0) - l| \le \frac{C}{\rho_0^2}\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n} = O(\rho_0^{-2}).$$

□

Traitons d'abord le cas $l = 0$. Pour r assez grand, (4.12) donne $|2\rho_0(2\rho_0)| \ge (1-\delta)|\rho_0 u(\rho_0)|$, ce qui est contradictoire avec l'asymptotique $|\rho_0 u(\rho_0)| = O(\rho_0^{-2})$.

On suppose maintenant que $l \neq 0$. On va obtenir la conclusion du Lemme pour $\lambda := \frac{l^2}{3}$. Après un changement d'échelle, on peut supposer que $\lambda = 1$. Or, soit $(g_0, g_1) = \Psi_{\rho_0}(u_0 - W, u_1)$ où ρ_0 est grand, et soit g donné par le Lemme 4.6. On a (4.8), donc (4.9) est vrai avec u remplacé par g. Le Lemme 4.9 donne alors, pour ρ_0 grand,

$$\|(g_0,g_1)\|_{\rho_0}^2 \le \rho_0 g_0(\rho_0)^2. \tag{4.13}$$

Par le Lemme 4.8 on a donc

$$2\rho_0 g_0(2\rho_0) \ge \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right)\rho_0 g_0(\rho_0) \ge \frac{1}{2}\rho_0 g_0(\rho_0). \tag{4.14}$$

De l'autre côté, il est facile de voir que $\rho_0 W(\rho_0) - \sqrt{3} = O(\rho_0^{-2})$, donc aussi $\rho_0 g_0(\rho_0) = O(\rho_0^{-2})$. En vue de (4.14) cela est possible seulement si g_0 est à support compact. Par (4.13) g_1 doit aussi être à support compact, ce qui finit la démonstration.

Chapitre 5

Théorie globale II

5.1. Décomposition en solitons pour une sous-suite de temps

Soit v_{L} la partie linéaire donée par la Proposition 3.20. Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 5.1. *Soit t_n une suite de temps telle que la suite $\vec{u}(t_n)$ soit bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$. Alors, pour une sous-suite de t_n (que l'on note toujours t_n), il existe $J \in \mathbb{N}$, $\imath_j = \pm 1$ et des suites $\lambda_{j,n}$ telles que*

$$0 < \lambda_{1,n} \ll \lambda_{2,n} \ll \ldots \ll \lambda_{J,n} \ll t_n,$$

et

$$\vec{u}(t_n) - \vec{v}_{\mathrm{L}}(t_n) - \left(\sum_{j=1}^{J} \imath_j W_{\lambda_{j,n}}, 0 \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \dot{H}^1 \times L^2.$$

Dans le paragraphe suivant il sera essentiel que v_{L} ne dépend pas de la suite t_n.

D'abord, on a besoin de traduire les résultats de la Section 4 en langage des profils.

Lemme 5.2. *Soit*

$$U^j_{\mathrm{L},n}(t,x) = \frac{1}{\lambda_{j,n}^{1/2}} U^j_{\mathrm{L}} \left(\frac{t - t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{x}{\lambda_{j,n}} \right), \quad U^j_{\mathrm{L}}(t) = S(t)(U^j_0, U^j_1).$$

un profil non nul. On suppose qu'on est dans une des deux situations suivantes.

1.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \in \{\pm\infty\}, \tag{5.1}$$

2. $t_{j,n} = 0$ pour tout n et, en plus,

(a) ou bien pour tout $\mu > 0$, $\imath \in \{\pm 1\}$

$$\left(U^j_0 - \imath W_\mu, U^j_1 \right)$$

n'est pas à support compact,

(b) ou bien il existe $\imath \in \{\pm 1\}$ tel que $\left(U_0^j \pm W, U_1^j\right)$ est à support compact et

$$\rho\left(U_0^j \pm W, U_1^j\right) > R_0,$$

(pour la définition de R_0 cf. Section 4).

Alors il existe $\widetilde{U}_{\mathrm{L}}^j$ solution de l'équation des ondes linéaire, et une suite de nombres strictement positifs $\{\rho_{j,n}\}_n$ telle que le profil non linéaire $\widetilde{U}^j$ associé à $\widetilde{U}_{\mathrm{L}}^j$, $\{t_{j,n}, \lambda_{j,n}\}_n$ disperse pour les temps positifs et négatifs,

$$\forall n, \quad |x| > \rho_{j,n} \Longrightarrow \vec{\widetilde{U}}_{\mathrm{L},n}^j(0,x) = \vec{U}_{\mathrm{L},n}^j(0,x), \tag{5.2}$$

et il existe $\eta_j > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$ ou pour tout $t \leq 0$,

$$\forall n, \quad \int_{|x|>\rho_{j,n}+|t|} \left|\nabla \widetilde{U}_n^j(t,x)\right|^2 + \left|\partial_t \widetilde{U}_n^j(t,x)\right|^2 dx \geq \eta_j. \tag{5.3}$$

Démonstration. La démonstration dans le cas (5.1) consiste à faire une analyse de l'équation linéaire similaire à celle que l'on a déjà faite dans la Section 4. On omet les détails.

Soit donc $t_{j,n} = 0$ pour tout n. En appliquant les résultats de la Section 4 on obtient qu'il existe $\widetilde{U}^j$, une solution de l'équation (1.1) qui disperse pour les temps positives et négatives, et $R_j, \eta_j > 0$ tels que

$$(\widetilde{U}^j, \partial_t \widetilde{U}^j)(0,x) = (U^j, \partial_t U^j)(0,x) \qquad \text{pour } |x| \geq R_j,$$

et tels que pour $t \leq 0$ ou pour $t \geq 0$

$$\int_{|x|\geq R_j+|t|} |\nabla \widetilde{U}^j(t,x)|^2 + |\partial_t \widetilde{U}^j(t,x)|^2 \, dx \geq \eta_j.$$

Un simple changement de variable montre que pour

$$\rho_{j,n} := \lambda_{j,n} R_j, \quad \widetilde{U}_{\mathrm{L}}^j(t) := S(t)(\widetilde{U}^j(0), \partial_t \widetilde{U}^j(0))$$

on a la conclusion du lemme. □

La preuve de la Proposition 5.1 se fait par contradiction.

Lemme 5.3. *Supposons que la Proposition 5.1 soit fausse. Alors il existe une suite de temps $t_n \to +\infty$, une suite bornée $(u_{0,n}, u_{1,n}) \in \dot{H}^1 \times L^2$ et une suite $\rho_n \geq 0$ telles que*

$$|x| \geq \rho_n \Longrightarrow (u(t_n,x), \partial_t u(t_n,x)) = (u_{0,n}(x), u_{1,n}(x)), \tag{5.4}$$

et la suite (u_{0n}, u_{1n}) a une décomposition en profils

$$(u_{0,n}, u_{1,n}) = \vec{v}_{\mathrm{L}}(t_n) + \sum_{j=1}^{J_0} \left(\imath_j W_{\lambda_{j,n}}, 0\right) + \sum_{j=J_0+1}^{J} \vec{U}_{\mathrm{L},n}^j(0) + (w_{0,n}^J, w_{1,n}^J) \tag{5.5}$$

ayant les propriétés suivantes :

1. Pour $j > J_0$ le profil non linéaire U^j disperse pour les temps positifs et négatifs, *2. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'on est dans l'une des situations suivantes :*

(a) ou bien il existe un $j_0 > J_0$ tel que pour tout $t \leq 0$ ou $t \geq 0$

$$\forall n \quad \int_{|x|\geq \rho_n+|t|} |\nabla U_n^{j_0}(t,x)|^2 + (\partial_t U_n^{j_0}(t,x))^2\, dx \geq \varepsilon_0,$$

(b) ou bien pour $t \leq 0$ ou $t \geq 0$

$$\lim_{J\to+\infty} \liminf_{n\to+\infty} \int_{|x|\geq \rho_n+|t|} |\nabla w_n^J(t,x)|^2 + (\partial_t w_n^J(t,x))^2\, dx \geq \varepsilon_0.$$

Démonstration. La démonstration utilise la technique de “regarder la plus grande longueur caractéristique”. On rencontrera des difficultés supplémentaires, dues en particulier à la présence de la constante R_0 dans l'énoncé du Lemme 5.3.

Prenons donc une suite $t_n \to +\infty$ pour laquelle la conclusion de la Proposition 5.1 est fausse, et prenons la décomposition en profils de la suite $\overrightarrow{u}(t_n) - \overrightarrow{v}_{\mathrm{L}}(t_n)$ (où, on rappelle, v_{L} est la partie linéaire de la solution que l'on a trouvée dans la Section 3). Il est évident, par l'orthogonalité, que le nombre de profils U^j tels que $U^j(0) = (\pm W_\lambda, 0)$ et $t_{j,n} = 0\ \forall n$, est fini. On suppose, sans restreindre la généralité, que ce sont les profils $U^1, \ldots, U^{J_0}$ (éventuellement $J_0 = 0$). On obtient alors la décomposition

$$\vec{u}(t_n) = \vec{v}_{\mathrm{L}}(t_n) + \sum_{j=1}^{J_0} \left(\iota_j W_{\lambda_{j,n}}, 0\right) + \sum_{j=J_0+1}^{J} \overrightarrow{U}^j_{\mathrm{L},n}(0) + \left(w_{0,n}^J, w_{1,n}^J\right), \tag{5.6}$$

et pour $j > J_0$ on a deux possibilités :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}} \in \{\pm\infty\} \tag{5.7}$$

ou

$$\forall j \geq J_0+1,\ t_{j,n} = 0 \quad \text{et} \quad \forall \lambda > 0,\ \left(U_{0,\mathrm{L}}^j, U_{1,\mathrm{L}}^j\right) \neq (\pm W_\lambda, 0)\,. \tag{5.8}$$

Par l'hypothèse (que t_n ne vérifie pas la Proposition 5.1),

$$\liminf_{n\to+\infty} \left\| \sum_{j=J_0+1}^{J} \overrightarrow{U}^j_{\mathrm{L},n}(0) + \left(w_{0,n}^J, w_{1,n}^J\right) \right\|_{\dot{H}^1\times L^2} > 0,$$

donc soit un des profils U^j pour $j > J$ est non nul, et on va supposer sans restreindre la généralité que

$$U_{\mathrm{L}}^{J_0+1} \neq 0, \tag{5.9}$$

soit

$$\forall j \geq J_0+1,\ U^j = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \left\|(w_{0,n}^{J_0}, w_{1,n}^{J_0})\right\|_{\dot{H}^1\times L^2} > 0. \tag{5.10}$$

Dans le cas facile (5.10) on obtient immédiatement la conclusion en utilisant la propriété du canal d'énergie pour la solution linéaire $w_n = w_n^J = S(t)(w_{0,n}^J, w_{1,n}^J)$ (qui ne dépend pas de J).

Le cas (5.9) est beaucoup plus exigeant. On esquissera les étapes consécutives de la preuve. D'abord, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \leq \left\|(U_{\mathrm{L}}^{J_0+1}(0), \partial_t U_{\mathrm{L}}^{J_0+1}(0))\right\|_{\dot{H}^1 \times L^2}, \tag{5.11}$$

et tel que si

$$\|(U_0, U_1)\|_{\dot{H}^1 \times L^2} \leq 10\varepsilon$$

et U est une solution de (1.1) pour la donnée initiale (U_0, U_1), alors U disperse pour les temps positifs et négatifs. La valeur ε peut être aussi petite que l'on veut. Elle sert uniquement à identifier un nombre fini des profils "grands", parmi lesquels on considérera celui qui est le plus aplati.

On réordonne donc les profils de façon que, pour $J_0 \leq J_1 \leq J_2$,

$$J_0 + 1 \leq j \leq J_2 \Longrightarrow \left\|\Big(U_{\mathrm{L}}^j(0), \partial_t U_{\mathrm{L}}^j(0)\Big)\right\|_{\dot{H}^1 \times L^2} \geq \varepsilon \tag{5.12}$$

$$J_2 + 1 \leq j \Longrightarrow \left\|\Big(U_{\mathrm{L}}^j(0), \partial_t U_{\mathrm{L}}^j(0)\Big)\right\|_{\dot{H}^1 \times L^2} < \varepsilon \tag{5.13}$$

et, de plus,

- si $J_0 + 1 \leq j \leq J_1$, alors $\forall n$, $t_{j,n} = 0$, et $\Big(U_0^j, U_1^j\Big) = \imath_j(W, 0) + (h_0^j, h_1^j)$, où $\imath_j \in \{\pm 1\}$ et $(h_0^j, h_1^j) \in \dot{H}^1 \times L^2$ est non nul et à support compact,
- si $J_1 + 1 \leq j \leq J_2$, alors soit $\lim_{n \to +\infty} t_{j,n}/\lambda_{j,n} = \pm\infty$, soit $\forall n$, $t_{j,n} = 0$, mais pour tout $\lambda > 0$, $\big(U_0^j(x), U_1^j(x)\big) \pm \big(\frac{1}{\lambda^{1/2}} W(\frac{x}{\lambda}), 0\big)$ n'est pas à support compact.

Pour $J_0 + 1 \leq j \leq J_1$ on définit $\rho_{j,n} := \rho(h_0^j, h_1^j)\lambda_{j,n}$, où $\rho(\cdot)$ est le rayon du support d'une fonction à la symmétrie sphérique (cette notation a été introduite dans la Section 4). Donc, tenant compte du fait que $t_{j,n} = 0$, on a, pour $J_0 < j \leq J_1$,

$$|x| > \rho_{j,n} \Longrightarrow \vec{U}_{\mathrm{L},n}^j(0, x) = \left(\frac{\imath_j}{\lambda_{j,n}^{1/2}} W\Big(\frac{x}{\lambda_{j,n}}\Big), 0\right). \tag{5.14}$$

Après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que

$$\lambda_{J_0+1,n} \ll \ldots \ll \lambda_{J_1,n} \Longleftrightarrow \rho_{J_0+1,n} \ll \ldots \ll \rho_{J_1,n}. \tag{5.15}$$

Pour $J_1 < j \leq J_2$, on définit $\rho_{j,n}$ à l'aide du Lemme 5.3. On suppose que

$$\rho_{J_1+1,n} \leq \ldots \leq \rho_{J_2,n} \tag{5.16}$$

Pour $J_0 < J_1 < J_2$, on considère la limite

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{\rho_{J_2,n}}{\rho_{J_1,n}} \in [0, +\infty]$$

(on peut supposer qu'elle existe en extrayant une sous-suite). Cette limite n'est pas bien définie si $J_1 = J_0$ ou si $J_1 = J_2$, mais on vérifie facilement que la démonstration reste valide avec des conventions suivantes : si $J_1 = J_0$, alors on pose $\ell = +\infty$, et si $J_1 = J_2$, alors on pose $\ell = 0$. Il y a maintenant trois cas, en fonction de la valeur de ℓ.

Cas 1 : $\ell > 1$ Il suffit de définir

$$(u_{0,n}, u_{1,n}) = (v_{\mathrm{L}}(t_n), \partial_t v_{\mathrm{L}}(t_n)) + \sum_{j=1}^{J_1} \Big(\frac{\imath_j}{\lambda_{j,n}^{1/2}} W\Big(\frac{x}{\lambda_{j,n}}, 0\Big), 0 \Big) + \sum_{j=J_1+1}^{J_2} \vec{\widetilde{U}}^{j}_{\mathrm{L},n}(0) + \big(w_{0,n}^{J_2}, w_{1,n}^{J_2}\big).$$

Pour $J_0 < j \le J_1$ et $|x| \ge \rho_{j,n}$ on a (5.15), donc en vue de (5.14) on obtient $(u_{0,n}(x), u_{1,n}(x)) = (u(t_n, x), \partial_t u(t_n, x))$ pour $|x| > \rho_{J_2,n}$. Par le Lemme 5.3 on a, pour tout $t \le 0$ ou pour tout $t \ge 0$,

$$\int_{|x| \ge \rho_{J_2,n} + |t|} \Big(\big|\nabla \widetilde{U}_n^{J_2}(t,x)\big|^2 + \big|\partial_t \widetilde{U}_n^{J_2}(t,x)\big|^2 \Big) \ge \eta > 0 \tag{5.17}$$

La démonstration est finie.

Cas 2 : $\ell = 1$. La démonstration est presque la même que dans le cas précédant, il faut juste traiter le profil U^{J_1}. Pour le faire, posons

$$(H_{0,n}, H_{1,n}) = \Psi_{\rho_{J_2,n}} \left(\frac{1}{\lambda_{J_1,n}^{1/2}} h_0^{J_1}\Big(\frac{x}{\lambda_{J_1,n}}\Big), \frac{1}{\lambda_{J_1,n}^{3/2}} h_1^{J_1}\Big(\frac{x}{\lambda_{J_1,n}}\Big) \right),$$

(ici, Ψ_R est le cut-off radial défini dans la Section 3 et $(h_0^{J_1}, h_1^{J_1}) = (U_0^j, U_1^j) - \imath_j(W, 0)$). On définit

$$(u_{0,n}, u_{1,n}) = (v_{\mathrm{L}}(t_n), \partial_t v_{\mathrm{L}}(t_n)) + \sum_{j=1}^{J_1} \Big(\frac{1}{\lambda_{j,n}^{1/2}} W\Big(\frac{x}{\lambda_{j,n}}\Big), 0 \Big) + \sum_{j=J_1+1}^{J_2} \vec{\widetilde{U}}^{j}_{\mathrm{L},n}(0) + (H_{0n}, H_{1n}) + \big(w_{0,n}^{J_2}, w_{1,n}^{J_2}\big).$$

Par définition du cut-off, on a $(u_{0,n}(x), u_{1,n}(x)) = (u(t_n, x), \partial_t u(t_n, x))$ pour $|x| \ge \rho_{J_2,n}$. Or, la contribution de H est négligable :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla H_{0,n}^{J_1}|^2 + |H_{1,n}^{J_1}|^2 \right) dx = \int_{|x| \ge \rho_{J_2,n}} \left(\Big|\nabla h_0^{J_1}\Big(\frac{x}{\lambda_{J_1,n}}\Big)\Big|^2 + \Big|h_1^{J_1}\Big(\frac{x}{\lambda_{J_1,n}}\Big)\Big|^2 \right) \frac{dx}{\lambda_{J_1,n}^3}$$
$$= \int_{|y| \ge \frac{\rho_{J_2,n}}{\rho_{J_1,n}} \rho(h_0^{J_1}, h_1^{J_1})} \left(\big|\nabla h_0^{J_1}(y)\big|^2 + \big|h_1^{J_1}(y)\big|^2 \right) dy.$$

Comme $\rho(h_0^{J_1}, h_1^{J_1})$ est le support de $(h_0^{J_1}, h_1^{J_1})$ et $\frac{\rho_{J_2,n}}{\rho_{J_1,n}} \to \ell = 1$, cette intégrale converge vers 0. On obtient la conclusion comme dans le cas précédant.

Cas 3 : $\ell < 1$ Ce cas est laborieux et on donnera seulement l'idée principale.

Premièrement, si $\rho\big(h_0^{J_1}, h_1^{J_1}\big) \ge R_0$, alors on procède comme dans le premier cas, en utilisant la Proposition 4.2 (b) au lieu de la Proposition 4.1. Si $\rho\big(h_0^{J_1}, h_1^{J_1}\big) < R_0$, le remède est de faire évoluer l'équation pendant le temps $\lambda_{J_1,n} R_0$. Ceci correspond à une évolution du profil U^{J_1} pendant le temps R_0, ce qui, selon la Proposition 4.2 (a) augmente $\rho\big(h_0^{J_1}, h_1^{J_1}\big)$ de R_0. On obtient ainsi la conclusion pour une nouvelle suite de temps $\widetilde{t}_n := t_n + \lambda_{J_1,n} R_0$.

□

Pour terminer la démonstration de la Proposition 5.1, il faut donc exclure les possibilités 2a et 2b que nous laisse la conclusion du Lemme 5.3.

Soit $1 \leq j \leq J_0$. Alors, par (5.5) et (3.7), on a la convergence faible :

$$\left(\lambda_{j,n}^{1/2} u(t_n, \lambda_{j,n} \cdot), \lambda_{j,n}^{3/2} \partial_t u(t_n, \lambda_{j,n} \cdot)\right) \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} (\imath_j W, 0).$$

Supposons que, pour une sous suite,

$$\frac{\lambda_{j,n}}{t_n} \geq \frac{2}{R} > 0.$$

Par la semi continuité de la norme on obtient, après un changement de variable,

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{|x|\geq R\lambda_{j,n}} |u(t_n,x)|^2 + |\partial_t u(t_n,x)|^2 \, dx = \eta > 0.$$

De l'autre côté, soit $\widetilde{W}$ arbitrairement grand. Pour n assez grand (précisément pour $t_n \geq R$) on a l'inégalité $t_n + R \leq R\lambda_{j,n}$, donc pour n grand

$$\int_{|x|\geq \widetilde{R}+t_n} |u(t_n,x)|^2 + |\partial_t u(t_n,x)|^2 \, dx = \frac{1}{2}\eta > 0,$$

une contradiction avec le Principe de Huyghens. On en déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{t_n} = 0. \tag{5.18}$$

Pour traiter le cas où le canal d'énergie existe pour les temps négatifs, on a besoin d'introduire le profil non linéaire v associé à v_{L}, c.-à-d. la solution v du problème (1.1) telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{v}(t) - \vec{v}_{\mathrm{L}}(t)\|_{\dot{H}^1\times L^2} = 0. \tag{5.19}$$

On suppose que v est défini sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (on change éventuellement l'origine de l'axe du temps). Notons que par le critère de dispersion $\|u\|_{S([0,+\infty[)} \leq +\infty$.

On obtient la contradiction par récurrence par rapport à J_0.

Base de la récurrence

Soit $J_0 = 0$. On appelle u_n la solution de (1.1) pour la donnée initiale $(u_{0,n}, u_{1,n})$. Rappelons que l'on suppose que tous les profils U^j pour $j < J_0$ (donc, en l'occurrence, tous les profils sauf v), disperse dans le futur ainsi que dans le passé. On peut donc appliquer le Théorème 3.14 avec $\theta_n = -t_n$. On obtient que pour n suffisamment grand u_n est défini sur l'intervalle $[-t_n, +\infty[$ et que

$$\vec{u}_n(t,x) = \vec{v}(t_n + t, x) + \sum_{j=1}^{J} \overrightarrow{U}_n^j(t,x) + \overrightarrow{w}_n^J(t,x) + \overrightarrow{r}_n^J(t,x),$$

où

$$\lim_{J\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \sup_{t\in[-t_n,+\infty[} \left\|\overrightarrow{r}_n^J\right\|_{\dot{H}^1\times L^2} = 0.$$

Cas 1 : canal d'énergie dans le futur. Par l'orthogonalité localisée des profils non linéaires (Proposition 3.18) on voit que pour n grand :

$$\int_{|x|\geq \rho_n+t} \Big(|\nabla u_n(t,x) - \nabla v_{\mathrm{L}}(t_n+t,x)|^2 + (\partial_t u_n(t,x) - \partial_t v_{\mathrm{L}}(t_n+t,x))^2\Big)\, dx \geq \frac{\varepsilon_0}{2},$$

donc, par (5.4) et la vitesse de propagation,

$$\int_{|x|\geq \rho_n+t} \Big(|\nabla u(t_n+t,x) - \nabla v_{\mathrm{L}}(t_n+t,x)|^2 + (\partial_t u(t_n+t,x) - \partial_t v_{\mathrm{L}}(t_n+t,x))^2\Big)\, dx \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ceci est équivalent à

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq \rho_n-t_n+t} \Big(|\nabla u(t,x) - \nabla v_{\mathrm{L}}(t,x)|^2 + (\partial_t u(t,x) - \partial_t v_{\mathrm{L}}(t,x))^2\Big)\, dx > 0.$$

On a obtenu une contradiction avec la Proposition 3.20.

Cas 2 : canal d'énergie dans le passé. Encore une fois on utilise l'orthogonalité (Proposition 3.18), pour $\theta_n = -t_n$. Pour n grand on a donc l'inégalité :

$$\int_{|x|\geq \rho_n+t_n} |\nabla u_n(-t_n,x) - \nabla v(0,x)|^2 + (\partial_t u(-t_n,x) - \partial_t v(0,x))^2\, dx \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Mais cela dit que

$$\int_{|x|\geq \rho_n+t_n} \big(|\nabla u_0(x) - \nabla v(0,x)|^2 + (u_1(x) - \partial_t v(0,x))^2\big)\, dx \geq \frac{\varepsilon_0}{2},$$

une contradiction, parce que $\rho_n \geq 0$ et $t_n \to +\infty$.

La suite de la récurrence : une idée. Soit $J_0 > 0$. Sans restreindre la généralité supposons que

$$\lambda_{1,n} \ll \lambda_{2,n} \ll \ldots \ll \lambda_{J_0,n} \ll t_n.$$

L'idée consiste à rendre dispersif, par un cut-off bien choisi, le profil le plus aigu parmi les W, c.-à-d. celui avec la longueur caractéristique $\lambda_{1,n}$.

Soit $T > 0$ que l'on va préciser après. On applique le Théorème 3.14 à la décomposition (5.5), avec $\theta_n = \lambda_{1n}T$ (pour pouvoir appliquer ce théorème, il est essentiel que $\lambda_{1,n}$ ait la plus petite asymptotique parmi $\lambda_{j,n}$, $j = 1, \ldots, J_0$). On obtient alors

$$\begin{aligned}\vec{u}_n(\lambda_{1,n}T) &= \vec{v}_{\mathrm{L}}(t_n + \lambda_{1,n}T) + \sum_{j=1}^{J_0} \big(\imath_j W_{\lambda_{j,n}}, 0\big)\\ &\quad + \sum_{j=J_0+1}^{J} \overrightarrow{U}_n^j(\lambda_{1,n}T) + \overrightarrow{w}_n^J(\lambda_{1,n}T) + \overrightarrow{r}_n^J(\lambda_{1,n}T),\end{aligned} \tag{5.20}$$

où $\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \big\|\overrightarrow{r}_n^J(\lambda_{1,n}T)\big\|_{\dot{H}^1\times L^2} = 0$.

On pose $\big(\widetilde{U}_0^1, 0\big) = \Psi_T(W, 0)$. Soit $\widetilde{U}$ la solution de (1.1) pour la donnée initiale $(\widetilde{U}_0^1, 0)$. Pour T assez grand, $\widetilde{U}$ disperse dans le futur et dans le passé. Or, on verra que la suite

$$\begin{aligned}(\widetilde{u}_{0,n}, \widetilde{u}_{1,n}) &= \vec{v}_{\mathrm{L}}(t_n + \lambda_{1,n}T) + \left(\frac{\imath_1}{\lambda_{1,n}^{1/2}} \widetilde{U}_0^1\Big(\frac{x}{\lambda_{1,n}}\Big), 0\right)\\ &\quad + \sum_{j=2}^{J_0}\left(\frac{\imath_j}{\lambda_{j,n}^{1/2}} W\Big(\frac{x}{\lambda_{j,n}}, 0\Big)\right) + \sum_{j=J_0+1}^{J} \overrightarrow{U}_n^j(\lambda_{1,n}T) + \overrightarrow{w}_n^J(\lambda_{1,n}T) + \overrightarrow{r}_n^J(\lambda_{1,n}T)\end{aligned} \tag{5.21}$$

vérifie (5.4) et (5.5) avec $\tilde{t}_n = t_n + \lambda_{1,n}T$ et $\tilde{\rho}_n = \rho_n + \lambda_{1,n}T$, mais avec $J_0 - 1$ au lieu de J_0, ce qui permettra de boucler la récurrence.

L'égalité (5.4) est une conséquence du principe de propagation à vitesse finie. Soit

$$(\widetilde{w}^J_{0,n}, \widetilde{w}^J_{1,n}) = \vec{w}_n(\lambda_{1,n}T) + \vec{r}^J_n(\lambda_{1,n}T).$$

À partir de (5.21) on obtient la décomposition

$$\begin{aligned}(\widetilde{u}_{0,n}, \widetilde{u}_{1,n}) = \vec{v}_{\mathrm{L}}(\tilde{t}_n) + \sum_{j=2}^{J_0}\Big(\frac{\iota_j}{\lambda_{j,n}^{1/2}}W\Big(\frac{x}{\lambda_{j,n}}\Big), 0\Big) + \Big(\frac{\iota_1}{\lambda_{1,n}^{1/2}}\widetilde{U}^1_0\Big(\frac{x}{\lambda_{1,n}}\Big), 0\Big) \\ + \sum_{j=J_0+1}^{J}\Big(\frac{1}{\lambda_{j,n}^{1/2}}U^j\Big(\frac{-\tilde{t}_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{x}{\lambda_{j,n}}\Big), \frac{1}{\lambda_{j,n}^{3/2}}\partial_t U^j\Big(\frac{-\tilde{t}_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{x}{\lambda_{j,n}}\Big)\Big) + \big(\widetilde{w}^J_{0,n}, \widetilde{w}^J_{1,n}\big),\end{aligned}$$

On observe que $\tilde{t}_{j,n} - \tilde{t}_{j',n} = t_{j,n} - t_{j',n}$, donc les nouvelles suites de paramètres sont également orthogonales.

Ainsi, on se ramène au cas de $J_0 - 1$ profils stationnaires, et la démonstration de la Proposition 5.1 est finie.

5.2. Passage au temps continu

Soit t_n une suite de temps donnée par la Proposition 3.19. Soit J donné par la Proposition 3.19 appliquée à la suite $\vec{u}(t_n)$.

Lemme 5.4.

$$\lim_{t\to+\infty} \|\nabla_x(u - v_{\mathrm{L}})(t)\|^2_{L^2} = J\|\nabla_x W\|_{L^2}, \tag{5.22}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \|\partial_t(u - v_{\mathrm{L}})(t)\|^2_{L^2} = 0. \tag{5.23}$$

Démonstration. On montre d'abord que

$$\lim_{t\to+\infty} \|(\vec{u} - \vec{v}_{\mathrm{L}})(t)\|^2_{\dot{H}^1\times L^2} = J\|\nabla_x W\|_{L^2}. \tag{5.24}$$

Supposons que ce ne soit pas le cas. Comme la solution est continue par rapport au temps, il existe $\varepsilon \neq 0, |\varepsilon| < \|\nabla_x W\|^2_{L^2}$, et une suite t'_n telle que

$$\forall n \quad \|(\vec{u} - \vec{v}_{\mathrm{L}})(t'_n)\|^2_{\dot{H}^1\times L^2} = J\|\nabla_x W\|^2_{L^2} + \varepsilon. \tag{5.25}$$

En même temps, encore une fois par la Proposition 5.1, il existe J' tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(\vec{u} - \vec{v}_{\mathrm{L}})(t'_n))\|^2_{\dot{H}^1\times L^2} = J'\|\nabla_x W\|^2_{L^2}, \tag{5.26}$$

ce qui est en contradiction avec (5.25). Un particulier cela signifie que la solution reste bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$.

Supposons maintenant que (5.23) soit faux. Alors il existe $\varepsilon \neq 0$ et une suite t'_n telle que

$$\forall n \quad \|\partial_t(u - v_{\mathrm{L}})(t'_n)\|^2_{L^2} = \varepsilon. \tag{5.27}$$

Cela contredit la Proposition 5.1, car on sait déjà que la suite $\vec{u}(t'_n)$ est bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2$.

En soustrayant (5.23) de (5.24) on obtient (5.22). $\square$

On est en position de terminer la démonstration du Théorème 1.2. La preuve se fait en deux étapes.

Étape 1. Construction de $\lambda_j(t)$. Pour $j = 1, \ldots, J$ soit

$$B_j := (j-1)\|\nabla_x W\|_{L^2}^2 + \int_{|x|\le 1} |\nabla_x W|^2 \, dx. \tag{5.28}$$

Pour t grand on définit

$$\lambda_j(t) := \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_{|x|\le\lambda} |\nabla_x (u - v_{\rm L})(t)|^2 \, dx \ge B_j\Big\}. \tag{5.29}$$

Lemme 5.5. *Soit $\theta_n \to +\infty$ une suite de temps et soit $\lambda_{j,n}, \imath_j$ les paramètres donnés par la Proposition 5.1. Alors, pour une sous-suite,*

$$\lim_{n\to+\infty} \Big\| \vec{u}(t_n) - \vec{v}_{\rm L}(t_n) - \Big(\sum_{j=1}^J \imath_j W_{\lambda_j(\theta_n)}, 0\Big)\Big\|_{\dot H^1\times L^2} = 0, \tag{5.30}$$

$$\lambda_1(\theta_n) \ll \ldots \ll \lambda_J(\theta_n) \ll \theta_n. \tag{5.31}$$

Démonstration. Pour $r_0 > 0$ on obtient, par l'orthogonalité des paramètres,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|\le r_0\lambda_{j,n}} |\nabla_x(u - v_{\rm L})(\theta_n)|^2 \, dx = (J-1)\|\nabla_x W\|_{L^2}^2 + \int_{|x|\le r_0} |\nabla_x W|^2 \, dx. \tag{5.32}$$

Alors, pour $r_0 < 1$ et n grand la définition de λ_j donne $\lambda_j(\theta_n) \ge r_0\lambda_{j,n}$. De même pour $r_0 > 1$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_j(\theta_n)}{\lambda_{j,n}} = 1 \qquad j = 1, \ldots, J \tag{5.33}$$

et le lemme est démontré. □

Corollaire 5.6.

$$0 < \lambda_1(t) \ll \ldots \ll \lambda_J(t) \ll t. \tag{5.34}$$

Démonstration. Si ce n'est pas le cas, alors il existe $c > 0$ et une suite θ_n tels que, par exemple, $\lambda_1(\theta_n) \ge c\lambda_2(\theta_n)$. Cela reste vrai après extraction d'une sous-suite – contradiction avec (5.31). □

Étape 2. Choix de $\imath_j$. Soit $\imath, \imath' \in \{-1,1\}^J, \imath \neq \imath'$. Par orthogonalité on observe que pour t assez grand

$$\Big\|\sum_{j=1}^J \imath_j W_{\lambda_j(t)} - \sum_{j=1}^J \imath_j' W_{\lambda_j(t)}\Big\|_{\dot H^1} \ge \|\nabla_x W\|_{L^2} > 0. \tag{5.35}$$

Supposons que la conclusion du théorème ne soit vraie pour aucun $\imath$. Alors, par la continuité forte de u par rapport au temps, il existe $\delta > 0$ et une suite θ_n tels que

$$\forall \imath \in \{-1,1\}^J \quad \Big\|\vec{u}(\theta_n) - \vec{v}_{\rm L}(\theta_n) - \Big(\sum_{j=1}^J \imath_j W_{\lambda_j(\theta_n)}, 0\Big)\Big\|_{\dot H^1\times L^2} \ge \delta. \tag{5.36}$$

Or, ce n'est pas possible à cause du Lemme 5.5. Le théorème est donc démontré.

Bibliographie

[Aub76] Aubin, T. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3) :269–296, 1976.

[BG99] Bahouri, H., et Gérard, P. High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations. *Amer. J. Math.*, 121(1) :131–175, 1999.

[Chemin] Chemin, J.-Y. Théorie des équation d'évolution. *Notes de cours à l'Université Paris VI.*

[DKM1] Duyckaerts, T., Kenig, C., et Merle, F. Universality of blow-up profile for small radial type II blow-up solutions of the energy-critical wave equation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 13*, 3 (2011), 533–599.

[DKM2] Duyckaerts, T., Kenig, C., et Merle, F. Universality of the blow-up profile for small type II blow-up solutions of the energy-critical wave equation : the non-radial case. Preprint. To appear in Journal of the European Mathematical Society.

[DKM4] Duyckaerts, T., Kenig, C. E., et Merle, F. Classification of radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation. arXiv : 1204.0031.

[DM08] Duyckaerts, T., et Merle, F. Dynamics of threshold solutions for energy-critical wave equation. *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, pages Art ID rpn002, 67, 2008.

[DM09] Duyckaerts, T., et Merle, F. Dynamic of threshold solutions for energy-critical NLS. *Geom. Funct. Anal.*, 18(6) :1787–1840, 2009.

[Evans] Evans, L. C. Partial differential equations, Second edition. AMS, 2010.

[KM06] Kenig, C. E., et Merle, F. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case. *Invent. Math.*, 166(3) :645–675, 2006.

[KM08] Kenig, C. E., et Merle, F. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical focusing non-linear wave equation. *Acta Math.*, 201(2) :147–212, 2008.

[MM01] Martel, Y., et Merle, F. Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations. *Arch. Rat. Mec. Anal.*, 157(3) :219–254, 2001.

[Tal76] Talenti, G. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 110 :353–372, 1976.

[Tao] Tao, T. Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis. CBMS, 106, 2006.