# Kurs algebry z perspektywy studenta

Jacek Jendrej

5 czerwca 2010

## Wstęp

Koniec drugiego semestru nauki algebry zachęca, aby poszukać pewnych spajających wątków oraz zastanowić się nad jej powiązaniami z innymi poznanymi działami matematyki. Spróbuję to zrobić w niniejszym eseju. Skoncentruję się przy tym na działaniu grup na różnych strukturach, które było niewątpliwie jednym z centralnych pojęć całego kursu.

## Działania grup

**Podstawy.** W pierwszych miesiącach nauki dowiedziałem się, jak można doprowadzić to pojęcie do rozsądnego stopnia ogólności (działanie grupy na obiekcie dowolnej kategorii) oraz poznałem pewien slogan, który pozwoli mi na pewien czas zapamiętać, po co wymyślono grupy.

W dalszej kolejności omówiono terminologię związaną z działaniami grup skończonych na zbiorach, zwłaszcza skończonych (kluczowe w dalszym ciągu Równanie Klas). Pojawiające się wówczas zadania i twierdzenia miały zazwyczaj wyraźny odcień kombinatoryczny. W szczególności pamiętam następujące zastosowania zbudowanego aparatu:

- twierdzenie Cayley'a, wzmianka o reprezentacjach liniowych grupy $n$-elementowej – trywialnej (w $\mathrm{GL}(n, k)$) i naturalnej (w $\mathrm{GL}(n-1, k)$),
- zliczanie orbit (czyli „elementów istotnie różnych z punktu widzenia grupy", np. kolorowań sześcianu) jako średniej liczby punktów stałych,
- szkic klasyfikacji skończonych podgrup $\mathrm{SO}(3)$ (punktem wyjścia jest rozpatrywanie działania hipotetycznej podgrupy na naturalnie zdefiniowanym zbiorze „biegunów" jej elementów),
- twierdzenie Cauchy'ego.

Następnie miałem okazję przyjrzeć się pierwszemu przykładowi działania grupy w kategorii innej niż *Set* – było to oczywiście działanie grupy na sobie przez sprzężenia. Z tego punktu widzenia centralizator elementu to zbiór punktów stałych jego działania, a podgrupa normalna to suma pełnych orbit. Tego typu obserwacje okazały się pomocne przy dowodzeniu twierdzeń Sylowa i prostoty grupy $A_n$ dla $n > 4$.

**Przykłady z trochę innej beczki.** Dopiero w drugim semestrze poznałem bliżej najważniejszy chyba z punktu widzenia historii matematyki przykład działania grupy – mianowicie naturalne działanie $\mathrm{Aut}(F/k)$ na $F$, gdzie $k \subset F$ jest rozszerzeniem Galois. Związek dwóch normalności – rozszerzenia i podgrupy – wydawał mi się początkowo dość mistyczny, i chyba nie tylko mi. Jednak warunek normalności oznacza dokładnie tyle, iż dane rozszerzenie jest sumą pełnych orbit powyższego działania. A podgrupy normalne to także sumy pełnych orbit, tyle że działania przez sprzężenia. Uwaga ta wyłuskuje jak sądzę pewien wspólny mianownik dwóch rodzajów normalności, czyniąc ich związek mniej tajemniczym. A jeśli przypomnieć sobie jeszcze, że centralizatory elementów na tej samej orbicie są sprzężone, wszystko zacznie się powoli składać w jedną całość, pod warunkiem, że ustali się wcześniej bijektywność odpowiedniości Galois.

Moim ulubionym chyba przykładem działania grup było działanie skończonych podgrup $\mathrm{GL}(n, k)$ na algebrze $k[x_1, \ldots, x_n]$. Omówione zostało stare zagadnienie skończonej generowalności algebry niezmienników. Z uwagi na jakościowy, niekombinatoryczny charakter tego problemu, teoria opisana w paragrafie Podstawy znalazła, poza dostarczeniem terminologii, niewielkie zastosowanie. Widoczny natomiast jest związek z teorią Galois – rozszerzając dane działanie na $k(x_1, \ldots, x_n)$ i biorąc ciało niezmienników dostanie się oczywiście skończone rozszerzenie Galois. Zatem na przykład w ciele niezmienników znajdzie się $n$ elementów algebraicznie niezależnych. Nietrudno udowodnić, że ciało niezmienników jest ciałem ułamków pierścienia niezmienników. Stąd i z twierdzenia Noether o normalizacji wynika, że $n$ elementów algebraicznie niezależnych można znaleźć już w samym pierścieniu niezmienników. Takie podejście generuje też dużo trudnych pytań, np. kiedy ciało niezmienników jest rozszerzeniem czysto przestępnym, tak jak w przypadku funkcji wymiernych symetrycznych?

Zagadnienia te nie były, prawdopodobnie z braku czasu lub przydatności, dokładnie omówione na zajęciach. Wydają mi się one jednak na tyle interesujące, że zamierzam poszerzyć wiadomości na ten temat w wolnym czasie, zwłaszcza że łączy on w sobie wiele z tego, czego uczyłem się w trakcie całego kursu algebry – własności pierścieni noetherowskich, teorię pierścieni z gradacją... Chciałbym się również dowiedzieć, czy dokładniejsza, ilościowa analiza problemu ujawnia ściślejszy związek z podstawową, „kombinatoryczną" teorią działań grup, oraz jak można przenieść część wyników na przypadek grup nieskończonych.

**Przykłady z jeszcze innej beczki.** Na innych wykładach, na które miałem okazję uczęszczać, stosunkowo rzadko eksponowane były związki poruszanych tematów z algebrą. Przytoczę jednak kilka przykładów, które zapadły mi w pamięć, ze szczególnym uwzględnieniem działań grup.

- Jak wiadomo ostatni problem poprzedniego paragrafu można częściowo rozwiązać zastępując miarę liczącą na grupie skończonej jej nieskończonym odpowiednikiem, czyli miarą Haara. Twierdzenie Haara pojawiło się bez dowodu na ostatnim wykładzie z analizy.
- Dyskretny układ dynamiczny to działanie grupy cyklicznej rzędu nieskończonego na przestrzeni z miarą.
- Na polach wektorowych nawias Lie wprowadza strukturę algebraiczną. Potok pola wektorowego to działanie grupy addytywnej $\mathbb{R}$ na rozmaitości. Istnieje zaskakująco prosty związek przemienności działań zdefiniowanych różnymi polami ze wspomnianą algebrą – komutowanie pól jest równoważne znikaniu ich komutatora.
- Biorąc pod uwagę fakt, iż działanie grupy na zbiorze skończonym zachowuje jego miarę liczącą, twierdzenia ergodyczne Birkhoffa można uznać za odpowiedniki podstawowego twierdzenia o tranzytywnym działaniu grupy (analogia chyba nie jest doskonała, bo używaną dawniej nazwę „przekształcenie metrycznie tranzytywne" zastąpiono przez „przekształcenie ergodyczne").

## Podsumowanie

Przytoczone powyżej przykłady są niewątpliwie nieco naiwne. Jednak to tym bardziej pozwala przypuszczać, że zagadnienia te uogólniono w różnych kierunkach i doprowadzono do ściślejszych powiązań z metodami algebraicznymi. Niestety, ze względu na rozbieżność między obszernością materiału a tempem studiowania, można wątpić, czy uda mi się docenić te związki chociaż częściowo.