

Rapport d'Enseignement d'Approfondissement MAP/MAT 581

Jacek Jendrej
Emma-Karoliina Kurki

24 mars 2012

Résumé

On s'intéressera à l'équation des milieux poreux

$$\partial_t u = \Delta_x u^m, \quad m > 1, \quad u = u(x, t), \quad (1)$$

qui a ses origines dans la mécanique des fluides. Notamment, on traitera l'existence et l'unicité des solutions et leurs propriétés principales. On propose un méthode pour la résolution numérique de l'équation (1), qu'on testera par comparaison à deux solutions analytiques. Finalement, on reproduira numériquement une propriété particulière des solutions : contrairement à celles de l'équation de la chaleur, elles propagent l'information à vitesse finie.

Nous voudrions remercier Xavier Blanc pour avoir corrigé de nombreuses erreurs dans ce rapport.

1 Motivation physique

L'équation des milieux poreux doit son nom à la description de la propagation d'un fluide dans un milieu poreux, où le mot «fluide» peut aussi bien signifier un gaz qu'un liquide compressible. D'un point de vue macroscopique, l'état du fluide se décrit par sa densité ρ , pression p et vitesse V . Toutes ces quantités sont des fonctions du temps et de l'espace. Pour décrire le comportement du fluide, on dispose des relations suivantes :

1. *Le bilan de masse* (équation de continuité), qu'on écrit dans un milieu poreux

$$\varepsilon \rho_t + \operatorname{div}(\varepsilon \rho V) = 0, \quad (2)$$

où ε signifie la *porosité* du milieu :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}}.$$

Dans ce qui suit, on ne considérera que des milieux homogènes, à porosité ε constante.

2. L'équation de l'état thermodynamique

$$p = p_0 \rho^\alpha, \quad (3)$$

où α est appelé l'exposant polytropique. On a toujours $\alpha \geq 1$, l'égalité ayant lieu pour un processus isotherme ; si $\alpha > 1$, il s'agit d'un processus adiabatique. Les écoulements dans les milieux poreux sont pratiquement toujours isothermes, car la capacité calorifique du milieu est en général très grande.

Cette équation est notamment valable pour les gaz parfaits mais peut s'appliquer aux liquides dans certaines conditions. Par exemple, Houpeurt [5] utilise une relation différente pour les liquides. Notre but n'est quand même pas d'entrer dans les détails du choix de l'équation de l'état.

3. *La loi de Darcy.* Il s'agit d'une loi empirique, proposée vers 1856 par Henry Darcy (X1821), dont les travaux sur les fontaines publiques de la ville de Dijon [3] l'ont conduit à étudier le processus de filtration de l'eau à travers du sable. Selon les observations de Darcy, la vitesse de propagation d'un fluide dans un tel milieu est directement proportionnelle au gradient de la pression :

$$\mu \varepsilon V = -k \nabla_x p, \quad (4)$$

où μ est la viscosité du fluide. Cette loi remplace les équations de Navier-Stokes dans le cas d'un milieu poreux. Le coefficient de proportionnalité k , appelé *perméabilité*, est une caractéristique du milieu dont l'ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel. Par exemple, pour le sable, une valeur typique de k est entre 20 et 200 $(\mu m)^2$ [4].

Un simple calcul suffit pour aboutir à l'équation à laquelle on s'intéressera dans la suite. Pour un milieu homogène et isotrope, la perméabilité k et la porosité ε sont constants en espace. En toute rigueur, la viscosité μ varie un peu en fonction de la pression, mais la considérer comme constante est pourtant une simplification raisonnable. Ces hypothèses prises en compte, les relations (2) – (4) conduisent à l'équation

$$\rho_t = c \Delta_x \rho^m,$$

avec $m = 1 + \alpha$ et

$$c = \frac{\alpha k p_0}{(\alpha + 1) \varepsilon \mu}.$$

L'ingénieur s'intéressera aux caractéristiques du milieu ; pour le mathématicien, il est commode d'éliminer la constante c , par exemple en effectuant le changement de variable $t' := ct$ en temps.

2 Étude mathématique

2.1 Formulation du problème

Une équation de la forme

$$\partial_t u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(t, x, u, \nabla_x u) + b(t, x, u, \nabla_x u), \quad (5)$$

où d est la dimension d'espace et $a_i(t, x, u, p)$, $b(t, x, u, p) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, est appelée une *équation parabolique quasi-linéaire*. Si de plus les a_i satisfont la condition

$$c_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(t, x, u, \partial_{x_i} u) \xi_i \xi_j \leq c_2 |\xi|^2 \quad (6)$$

pour certaines constantes positives c_1, c_2 et tout vecteur $\xi \in \mathbb{R}^d$, alors on dit que l'équation est non-dégénérée.

Soit $m \geq 2$. Soit Ω un ouvert borné régulier, $T \in]0; +\infty]$, et soit $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, nulle au bord $\partial\Omega$. On cherche une fonction positive u , solution du problème initial avec les conditions au bord de type Dirichlet :

$$\partial_t u = \Delta_x u^m = m \operatorname{div}(u^{m-1} \nabla_x u) \quad \text{dans }]0; T[\times \Omega, \quad (7)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad (8)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in]0; T[\times \partial\Omega. \quad (9)$$

Ceci est évidemment un problème quasi-linéaire pour $a_i(t, x, u, p) = m u^{m-1} p_i$, $b(t, x, u, p) = 0$.

Dans la région où $u > 0$ le problème est non-dégénéré, donc il peut être traité par des méthodes classiques (on verra un peu plus loin comment le faire). Mais en général ce problème est dégénéré et des phénomènes apparaissent qui ne sont pas prévus par la théorie classique. C'est la raison pour laquelle on introduit une formulation faible.

Définition 2.1. Soit $T < +\infty$. On dit qu'une fonction continue bornée $u : [0; T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, est une *solution généralisée* du problème (7)-(8)-(9) si

1. $\nabla_x(u^m)$ est une fonction bornée
2. pour toute fonction $C^1 \ni \eta : [0; T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\eta(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega \cup \{T\} \times \Omega$, la relation suivante est satisfaite :

$$\iint_{]0; T[\times \Omega} \nabla_x u^m \nabla_x \eta - u \partial_t \eta \, dt \, dx = \int_{\Omega} u_0 \eta(0, \cdot) \, dx. \quad (10)$$

Si $T = +\infty$, on dit que u est une solution si elle est une solution pour tout temps fini.

Remarque 2.2. Dans ce rapport on ne considère que des solutions positives. Une grande partie de la théorie peut être étendue pour y inclure le cas des solutions non-positives en remplaçant $\Delta_x(u^m)$ par $m \operatorname{div}(|u|^{m-1}u)$.

2.2 Existence et unicité des solutions

Proposition 2.3. *La solution généralisée du problème (7)-(8)-(9), si elle existe, est unique.*

Démonstration. On peut se restreindre aux temps finis.

Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions du problème. On considère la fonction $\eta(t) := \int_t^T (u_1(s)^m - u_2(s)^m) ds$. Par hypothèse, on a $\eta \in C^1([0; T[, W^{1,\infty}(\Omega))$, donc elle peut être approximée par des fonctions C^1 en norme $C^1([0; T[, W^{1,\infty}(\Omega))$. Alors passer à la limite dans l'identité (10) nous permet d'utiliser η comme une fonction test.

En soustrayant les équations pour u_1 et u_2 on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{]0; T[\times \Omega} \nabla_x(u_1^m - u_2^m) \nabla_x \eta - (u_1 - u_2) \partial_t \eta \, dt \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_0^T \nabla_x(u_1(t)^m - u_2(t)^m) \int_t^T \nabla_x(u_1(s)^m - u_2(s)^m) \, ds \, dt \right] dx \\ &\quad + \iint_{]0; T[\times \Omega} (u_1 - u_2)(u_1^m - u_2^m) \, dt \, dx. \end{aligned}$$

Le premier terme est non-négatif à cause de l'identité $\int_0^T f(t) \int_t^T f(s) \, ds \, dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^T f(t) \, dt \right)^2$. Donc $u_1 = u_2$ p. p. \square

Pour démontrer l'existence des solutions, on utilisera la théorie classique [6] :

Théorème 2.4. *Un problème parabolique quasi-linéaire non-dégénéré avec des données initiales et au bord continues et compatibles admet une unique solution continue et C^∞ dans $\Omega \times]0; \infty[$.*

De plus, on a le Principe (faible) de Comparaison :

Théorème 2.5. *Si u_1, u_2 sont deux solutions d'un problème parabolique quasi-linéaire non-dégénéré et*

1. $u_1(0, x) \leq u_2(0, x)$ pour $x \in \Omega$,
 2. $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$ pour $t \in [0; T[, x \in \partial\Omega$,
- alors $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$ pour $(t, x) \in [0; T[\times \Omega$.

Proposition 2.6. *Si $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue bornée et $u_0^m \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, alors il existe une solution généralisée de (7)-(8)-(9).*

Démonstration. La méthode consiste à considérer les solutions u_n de problèmes avec condition non-homogène $u_n(t, x) = \frac{1}{n}$ sur $]0; T[\times \partial\Omega$ et donnée initiale $u_{0n} := u_0 + \frac{1}{n}$, qui existent par la théorie classique.

Plus précisément on utilise des fonctions $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \ni a_i(u, p) := c_i(u)p_i$, où $c_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ tq $c_i(u) = mu^{m-1}$ si $u \geq \frac{1}{n}$ et $c_i(u) \geq \epsilon > 0$ pour tout u . Alors le problème (5) (pour $b \equiv 0$) est non-dégénéré, donc admet une unique solution u_n . Maintenant par le principe de comparaison $u_n \geq \frac{1}{n}$, et dans cette région les équations (5) et (7) coïncident, donc u_n est bien une solution de l'équation (7).

Par le principe de comparaison cette suite u_n est décroissante est positive, donc elle converge ponctuellement vers une limite u . On peut démontrer que sa limite est la solution cherchée. Une preuve complète est assez longue (voir [10]). \square

Corollaire 2.7 (Principe de comparaison). *Si $u_0 \leq \tilde{u}_0$ alors la solution u du problème (7)-(8)-(9) satisfait $u(t, \cdot) \leq \tilde{u}(t, \cdot)$ pour $t \in [0; T[$.*

Démonstration. Par le principe de comparaison classique les approximations u_n de u et \tilde{u}_n de \tilde{u} obtenues dans la démonstration de la proposition 2.6 vérifient $u_n \leq \tilde{u}_n$. Alors la limite le vérifie aussi. \square

Dans la suite on donnera plusieurs exemples de la puissance de ce principe.

Remarque 2.8. La définition 2.1 est valable aussi pour $\Omega = \mathbb{R}^d$, auquel cas il faut supposer que le support de $\eta(t, \cdot)$ reste dans une boule fixée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Les propositions 2.3 et 2.6 restent vraies.

2.3 Propriétés des solutions

Dans cette sous-section, on traitera les solutions lisses. Les résultats restent vrais pour les solutions généralisées, ce qui peut être démontré par passage à la limite comme dans la démonstration de la proposition 2.6.

Proposition 2.9 (Scaling). *Si u est une solution de (7), alors pour toutes constantes p, q la fonction $w(t, x) := \left(\frac{p}{q^2}\right)^{1/(m-1)} u(pt, qx)$ l'est aussi.*

Démonstration. Soit $A := \left(\frac{p}{q^2}\right)^{1/(m-1)}$. Alors

$$\partial_t w = Ap\partial_t u = A^m q^2 \Delta_x(u^m) = \Delta_x(w^m).$$

\square

Cela permet de créer, pour chaque solution particulière, une famille des solutions à deux paramètres.

Proposition 2.10. *Soit $m(t) := \int_{\Omega} u(t, x) dx$ la masse d'une solution u en temps t . Alors m est décroissante.*

Démonstration. Rappelons que $u \geq 0$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$, donc sur $\partial\Omega$ on a $\frac{\partial(u^m)}{\partial n} \leq 0$. En intégrant l'équation (7) en espace on obtient

$$\frac{d}{dt} m(t) = \int_{\Omega} \Delta_x(u^m) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(u^m)}{\partial n} d\sigma \leq 0.$$

□

Remarque 2.11. De plus, si $u(t, \cdot)$ est de support compact dans Ω , alors $\frac{\partial(u^m)}{\partial n} = 0$. Donc la masse est conservée jusqu'à ce que le support de u atteigne le bord.

Remarque 2.12. Ce calcul se généralise au cas $m(t) := \int_{\Omega} j(u(t, x)) dx$ si j est croissante et convexe.

Enfin, on a la stabilité des solutions par rapport aux données initiales en norme L^1 .

Proposition 2.13. *Soit u, \tilde{u} deux solutions de l'équation (7), avec données initiales u_0, \tilde{u}_0 .*

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1(\Omega)}. \quad (11)$$

Démonstration. C'est une preuve de Vázquez [10].

On introduit la notation $x_+ := \max(x, 0)$. Soit $U_0 := \max(u_0, \tilde{u}_0)$ et U la solution correspondante. Par principe de comparaison, $U \geq \max(u, \tilde{u})$. Observons que $U \geq \tilde{u}$, donc $U^m - \tilde{u}^m$ est une fonction positive dans Ω et nulle sur $\partial\Omega$. Alors $\frac{\partial(U^m - \tilde{u}^m)}{\partial n} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(U^m)}{\partial n} \leq \frac{\partial(\tilde{u}^m)}{\partial n}$ sur $\partial\Omega$. Alors (voir la démonstration de la proposition 2.10)

$$\int_{\Omega} U(t, x) - \tilde{u}(t, x) dx \leq \int_{\Omega} U_0(x) - \tilde{u}_0(x) dx.$$

Mais $(u - \tilde{u})_+ = \max(u, \tilde{u}) - \tilde{u} \leq U - \tilde{u}$ et $(u_0 - \tilde{u}_0)_+ = U_0 - \tilde{u}_0$. Donc

$$\int_{\Omega} (u - \tilde{u})_+ dx \leq \int_{\Omega} (u_0 - \tilde{u}_0)_+ dx.$$

De même $\int_{\Omega} (\tilde{u} - u)_+ dx \leq \int_{\Omega} (\tilde{u}_0 - u_0)_+ dx$ et la preuve est finie. □

2.4 Solutions particulières

On sait que u a une interprétation comme la densité d'un fluide. Il est naturel de considérer une autre quantité avec un sens physique : la pression normalisée $v := \frac{m}{m-1}u^{m-1}$. Alors $\nabla_x v = mu^{m-2}\nabla_x u$, d'où on obtient $\partial_t v = mu^{m-2}(m \operatorname{div}(u^{m-1}\nabla_x u)) = mu^{m-2}(\operatorname{div}(u\nabla_x v))$. La formule pour la divergence d'un produit conduit à l'équation

$$\partial_t v = |\nabla_x v|^2 + (m-1)v\Delta_x v. \quad (12)$$

Formellement, cette équation est vérifiée par $v(t, x) := \gamma(\gamma t - x_1)_+$. Ceci conduit à une solution particulière de l'équation (7)

$$u(t, x) = \left(\frac{m-1}{m} \gamma(\gamma t - x_1)_+ \right)^{1/(m-1)}, \quad (13)$$

dite *pression linéaire*.

Proposition 2.14. *La formule (13) donne une solution de l'équation (7) sur \mathbb{R}^d au sens de la définition 2.1.*

Démonstration. $\nabla_x u^m = -\left(\frac{m-1}{m}\gamma\right)^{\frac{m}{m-1}} \frac{m}{m-1}(\gamma t - x_1)_+^{\frac{1}{m-1}} e_1$ est bien borné. On notera $\beta := \left(\frac{m-1}{m}\gamma\right)^{\frac{m}{m-1}} \frac{m}{m-1} = \gamma \left(\frac{m-1}{m}\gamma\right)^{\frac{1}{m-1}}$.

Par intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x u^m \nabla_x \eta \, dx &= -\beta \int_{x_1 < \gamma t} (\gamma t - x_1)^{\frac{1}{m-1}} \partial_{x_1} \eta \, dx \\ &= \beta \int_{x_1 < \gamma t} \partial_{x_1} (\gamma t - x_1)^{\frac{1}{m-1}} \eta \, dx, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que η s'annule à l'infini. Or, $\beta \partial_{x_1} (\gamma t - x_1)^{\frac{1}{m-1}} = -\partial_t u$, donc finalement

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x u^m \nabla_x \eta \, dx - u \partial_t \eta \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} -\partial_t (u\eta) \, dx.$$

L'intégration en temps finit la preuve. \square

On va chercher maintenant une solution auto-semblable, c'est-à-dire de la forme $u(t, x) = t^{-a} F(t^{-b} x)$. Pour que la masse soit conservée, on doit avoir $b = a/d$. On note $\xi := t^{-a/d} x$ et on calcule :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -at^{-a-1} F(\xi) - \frac{a}{d} t^{-a-1} \xi \cdot \nabla F(\xi), \\ u^m &= t^{-am} F^m(\xi), \\ \Delta(u^m) &= t^{-am} t^{-2a/d} \Delta(F)(\xi). \end{aligned}$$

On pose donc $-a - 1 = -am - \frac{2a}{d} \Leftrightarrow a = \frac{d}{md-d+2}$, ce qui nous ramène à l'équation

$$-aF(\xi) - \frac{a}{d}\xi \cdot \nabla F(\xi) = \Delta(F^m)(\xi).$$

On peut vérifier que $F(\xi) = (C - k|\xi|^2)_+^{\frac{1}{m-1}}$ est formellement une solution pour $k = \frac{(m-1)a}{2md}$. On appelle la fonction $u(t, x) = t^{-a}(C - k|t^{-a/d}x|^2)$ une solution de type *Barenblatt*. Un calcul similaire à celui de la proposition 3 montre que u est effectivement une solution au sens de la définition 2.1.

Remarque 2.15. La solution de Barenblatt est la solution de l'équation (7) avec une masse de Dirac comme donnée initiale.

2.5 Propagation du front

Définition 2.16. Pour $t \geq 0$, on appelle *l'interface en temps t* l'ensemble $u(t, \cdot)^{-1}(0)$.

Dans le comportement de ces solutions on remarque la particularité suivante : l'interface se propage à vitesse finie. Dans le cas de la pression linéaire c'est la vitesse constante γ et dans le cas de la solution de Barenblatt l'interface en temps t est une sphère de rayon $ct^{\frac{1}{dm-1-d+2}}$ (où c est une constante). Il s'avère que ceci est une propriété générale des solutions de l'équation (7).

Proposition 2.17. *Il existe une fonction $\tau :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ avec la propriété suivante : Soit $\Omega = B(0, 1)$ une boule. Soit u_0 une donnée initiale à support compact dans Ω . Soit $M = \sup u_0$ et $d = \text{dist}(\text{supp}(u_0), \partial\Omega)$. Alors l'interface de la solution correspondante $u :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'atteint pas le bord avant le temps $\tau(M, d)$.*

Démonstration. La démonstration est plus facile que la formulation. Notamment il est possible de trouver une solution de type Barenblatt U et un temps $t_0 > 0$ tq $U(t_0, \cdot) \geq u_0$ et $U(t_0, \cdot)$ est à support compact dans Ω . La conclusion suit par le principe de comparaison. \square

Dans le cas uni-dimensionnel $\Omega = \mathbb{R}$ une analyse plus fine peut être effectuée. On présente quelques résultats du chapitre 3 de [2]. Les démonstrations en sont tirées aussi.

Proposition 2.18. *La pression v est lipschitzienne en espace :*

$$|\partial_x v(t, x)|^2 \leq \frac{2}{(m+1)t} \sup(v(t, \cdot)). \quad (14)$$

Démonstration. Fixons $x \in \mathbb{R}, t > 0$. L'idée principale est d'introduire la fonction $\phi(y) := v(x+y, t) + \frac{y^2}{2(m+1)t}$.

Cette fonction est positive et on peut montrer qu'elle est convexe (cela repose encore une fois sur le principe de comparaison pour une équation bien choisie, voir [2], p. 10). Donc pour tout $h > 0$

$$\phi'(0) \leq \frac{1}{h}(\phi(h) - \phi(0)) \leq \frac{\phi(h)}{h}.$$

De même $-\phi'(0) \leq \frac{\phi(-h)}{h}$, donc

$$|\partial_x v(t, x)| = |\phi'(0)| \leq \frac{1}{h} \max(\phi(h), \phi(-h)) \leq \frac{\sup(v(t, \cdot))}{h} + \frac{h}{2(m+1)t}.$$

Pour $h = \sqrt{2(m+1)t \sup(v(t, \cdot))}$ on obtient l'estimation désirée. \square

On notera $\zeta(t) := \sup\{x : u(t, x) > 0\}$. Le comportement de l'interface à gauche est similaire.

Corollaire 2.19. *Pour tout $\tau > 0$ $\zeta(t)$ est lipschitzienne sur $]\tau; T[$.*

Démonstration. Soit $t_0 \in [\tau; T[$. Alors pour $x \leq \zeta(t_0)$ $v(t_0, x) \leq C(\zeta(t_0) - x)$, où C est la constante de Lipschitz de $v(t_0, \cdot)$. On considère la pression linéaire $V(t, x) = C(C(t - t_0) + \zeta(t_0) - x)_+$. Alors on vient de démontrer que $V(t_0) \geq v(t_0)$. Par le principe de comparaison $V(t) \geq v(t)$ pour $t \geq t_0$. En particulier pour tout $\epsilon > 0$

$$V(t, \zeta(t) - \epsilon) > 0 \Rightarrow \zeta(t) - \epsilon < C(t - t_0) + \zeta(t_0) \Rightarrow \zeta(t) \leq \zeta(t_0) + C(t - t_0).$$

Mais par (14) $C \leq \left(\frac{2}{(m+1)\tau} \sup_{[\tau; T] \times \mathbb{R}} v \right)^{1/2}$, ce qui donne une constante de Lipschitz pour ζ . \square

On peut espérer trouver la vitesse a de propagation du front en comparant l'équation (12) avec l'équation de transport $\partial_t v + a \cdot \partial_x v = 0$. Dans l'équation (12) le terme $v \Delta v$ s'annule sur l'interface, donc on obtiendrait la vitesse de propagation $a = \zeta'(t) = -\partial_x v(t, \zeta(t))$, où par $\partial_x v(t, \zeta(t))$ on comprend la limite de $\partial_x v(t, x)$ quand $x \rightarrow \zeta(t)^-$.

Ce raisonnement heuristique peut être précisé. On obtient que ζ est dérivable à droite sur $]0; T[$ et cette dérivée vaut $-\partial_x v(t, \zeta(t))$.

Remarque 2.20. On peut démontrer que ζ est C^1 et strictement croissante sur $]t^*; T[$ où $t^* := \sup\{t : \zeta([0, t]) = \{\zeta(0)\}\}$ ("waiting time"), donc en particulier dans cette région la dérivée à droite est la dérivée "standard".

3 Résolution numérique

On souhaite résoudre numériquement le problème (7)-(8)-(9).

3.1 Discrétisation temporelle

On introduit un pas de temps δt . On notera u^n l'approximation de $u(n\delta t, \cdot)$.

En s'inspirant du cas linéaire (i.e. l'équation de la chaleur), on utilise un schéma implicite, qui s'écrit

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\delta t} = \Delta((u^n)^m) = m \operatorname{div}((u^n)^{m-1} \nabla(u^n)), \quad (15)$$

soit une version faible, à savoir $\forall v \in C_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u^n v \, dx + \int_{\Omega} \delta t m (u^n)^{m-1} \nabla u^n \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} u^{n-1} v \, dx. \quad (16)$$

Un raisonnement similaire à la démonstration de la proposition 2.6 montre que pour u^{n-1} positive, continue et nulle au bord le problème (16) a une unique solution et cette solution est positive (au lieu de la théorie classique des équations paraboliques quasi-linéaires on utilise la théorie des équations de type elliptique [7]).

Remarque 3.1. Un θ -schéma pour $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$ pourrait aussi donner de bons résultats, mais nous ne l'avons pas testé dans ce projet.

Proposition 3.2. *Le schéma (15) est consistant d'ordre $O(\delta t)$ et stable en norme L^2 .*

Démonstration. La première partie est évidente. Pour la deuxième partie il suffit de prendre $v = u^n$ dans (16). $\int_{\Omega} (u^n)^{m-1} |\nabla u^n|^2 \, dx \geq 0$, donc on obtient

$$\|u_n\|_{L^2}^2 \leq \int_{\Omega} u^{n-1} u^n \, dx \leq \|u^{n-1}\|_{L^2} \|u^n\|_{L^2} \Rightarrow \|u^n\|_{L^2} \leq \|u^{n-1}\|_{L^2}.$$

□

3.2 Discrétisation spatiale

Pour résoudre le problème non-linéaire (16) on va mettre en oeuvre la méthode de point fixe. Notamment, on cherche le point fixe u^n de l'application qui à u_{q-1} associe la solution u_q du problème

$$\int_{\Omega} u_q v \, dx + \int_{\Omega} \delta t m (u_{q-1})^{m-1} \nabla u_q \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} u^{n-1} v \, dx. \quad (17)$$

Comme le problème (16), le problème (17) admet une unique solution qui est positive si u_0 et u_{q-1} sont positives.

Remarque 3.3. Nous ne savons pas démontrer que la méthode d'itérations converge vers le point fixe, bien que les expériences numériques le confirment, au moins en dimension 1.

Pour résoudre le problème (17), on utilise la méthode des éléments finis.

Remarquons que la forme bilinéaire associée au problème n'est pas en général coercive. Cette forme est strictement positive (donc définie positive sur tout sous-espace de dimension finie), ce qui permet de résoudre les systèmes linéaires qui apparaissent dans l'algorithme, mais l'analyse de convergence, telle qu'elle est présentée par exemple dans [1], n'est pas possible.

4 Résultats numériques

La méthode décrite ci-dessus a été implémentée dans FreeFem++ v 3.18 avec les éléments finis \mathbb{P}_1 . Notre Ω est l'intervalle $[0; 100]$. Pour tester la méthode on utilise l'exemple de la pression linéaire avec $\gamma = 50$ sur l'intervalle temporel $[0; 1]$ ainsi que l'exemple de solution de Barenblatt sur l'intervalle temporel $[0.001; 1.001]$ pour C tel qu'en temps final la solution soit supportée sur $[25; 75]$. On fixe $m = 3$.

Remarque 4.1. En pratique, la solution numérique de (17) n'est pas toujours positive. C'est pour ça que dans le code FreeFem++ on remplace (17) par

$$\int_{\Omega} u_q v \, dx + \int_{\Omega} \delta t m |u_{q-1}|^{m-1} \nabla u_q \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} u^{n-1} v \, dx.$$

Pour $m = 3$ ceci ne change rien, mais pour d'autres valeurs de m cette correction est nécessaire.

Pour la solution de Barenblatt on impose les conditions de Dirichlet homogènes. Pour la pression linéaire la condition à droite est Dirichlet homogène, alors qu'à gauche c'est la condition de Neumann qui donne le flux de la solution correcte.

4.1 Analyse de convergence

Comme une estimation d'erreur on considère

$$\sigma := \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|u^n - u(n \delta t, \cdot)\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $N := 1/\delta t$ et la norme $\|u^n - u(n \delta t, \cdot)\|_{L^2}$ est approximée sur le maillage.

On note δx le taille du maillage. Les tables 1 et 2 présentent comment les valeurs de σ dépendent de δt et δx .

On peut conclure qu'en première approximation la convergence par rapport au pas de temps est d'ordre 1, comme prévu par la théorie.

$\sigma =$	$\delta x = 2$	$\delta x = 1$	$\delta x = 0.5$	$\delta x = 0.2$
$\delta t = 0.05$	8.84	8.97	9.05	9.03
$\delta t = 0.01$	2.05	1.98	2.05	1.94
$\delta t = 0.005$	1.33	1.09	1.07	1.02
$\delta t = 0.002$	1.05	0.63	0.49	0.49
$\delta t = 0.001$	1.01	0.53	0.33	0.26
$\delta t = 0.0005$	1.00	0.51	0.27	0.16
$\delta t = 0.0002$	1.00	0.50	0.25	0.11

TABLE 1 – Erreur quadratique pour la pression linéaire.

$\sigma =$	$\delta x = 2$	$\delta x = 1$	$\delta x = 0.5$	$\delta x = 0.2$
$\delta t = 0.05$	3.87	3.74	4.02	3.92
$\delta t = 0.01$	2.65	1.67	1.88	1.73
$\delta t = 0.005$	2.58	1.22	1.31	1.13
$\delta t = 0.002$	2.66	0.96	0.83	0.59
$\delta t = 0.001$	2.69	0.93	0.65	0.35
$\delta t = 0.0005$	2.71	0.94	0.56	0.21
$\delta t = 0.0002$	2.74	0.96	0.52	0.14

TABLE 2 – Erreur quadratique pour la solution de Barenblatt.

De plus, la convergence par rapport au pas d'espace est aussi d'ordre 1, comme pour le cas non-dégénéré.

Les figures 1 et 2 montrent les approximations des solutions au temps final données par l'algorithme pour $\delta t = 0.002$, $\delta x = 1$.

4.2 Propagation du front

Comme une approximation de la valeur de la fonction de l'interface $\zeta(n \delta t)$ on prend simplement la position du premier noeud du maillage où la valeur de u^n est négative.

Les figures 3 et 4 montrent les résultats numériques pour $\delta t = 0.002$, $\delta x = 1$. On voit que la méthode utilisée révèle bien le phénomène de propagation à vitesse finie.

Références

- [1] G. Allaire : *Analyse numérique et optimisation*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

- [2] D. G. Aronson : *The Porous Medium Equation*, Lecture Notes in Mathematics.
- [3] H. Darcy : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*.
- [4] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit : *Hydrodynamique physique*, CNRS Éditions, 2001.
- [5] A. Houpeurt : *Elements de mecanique des fluides dans les milieux poreux*, Editions Technip, 1975.
- [6] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1968.
- [7] O. A. Ladyženskaja, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1968.
- [8] S. Lasserre : *Étude mathématique et numérique pour les modèles de turbulence*, thèse de doctorat à l'Université Paris VI.
- [9] P.-H. Maire : *CEA/DIF/DCSA/SSA/55/01/DO*.
- [10] J. L. Vázquez : *The Porous Medium Equation. Mathematical theory*, Oxford Mathematical Monographs.

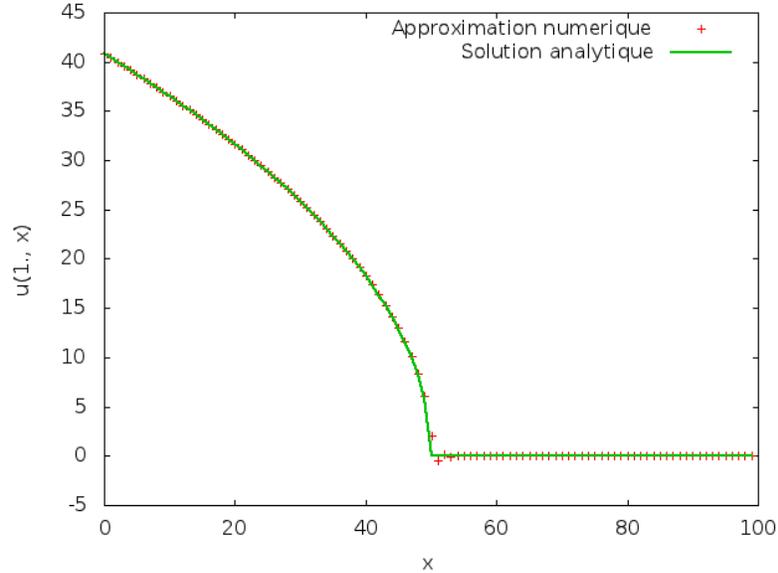


FIGURE 1 – Solution au temps final pour la pression linéaire.

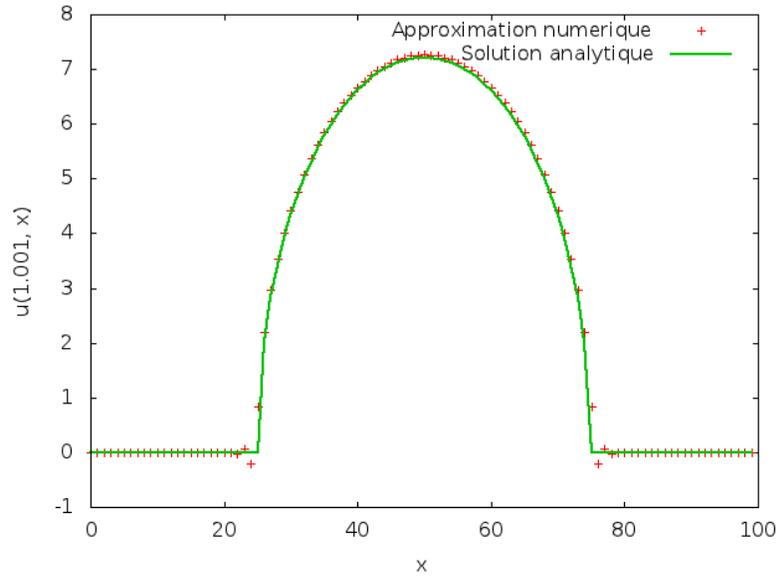


FIGURE 2 – Solution au temps final pour la solution de Barenblatt.

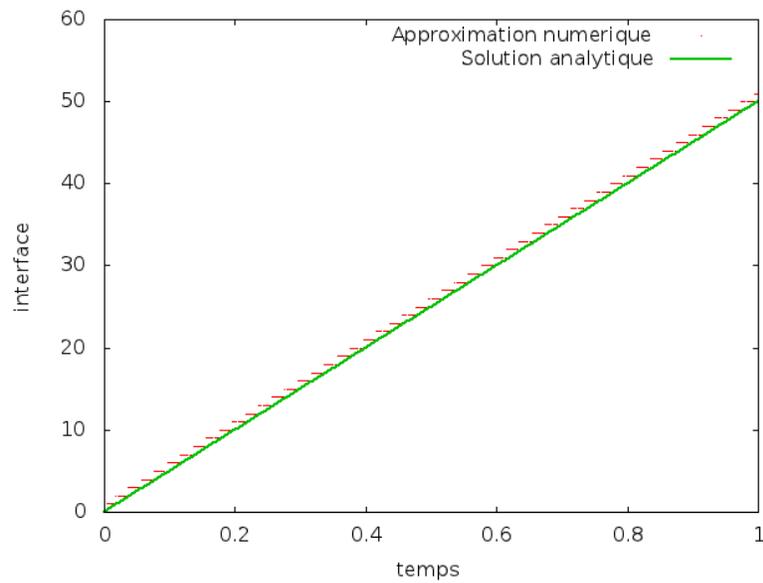


FIGURE 3 – Propagation de front pour la pression linéaire.

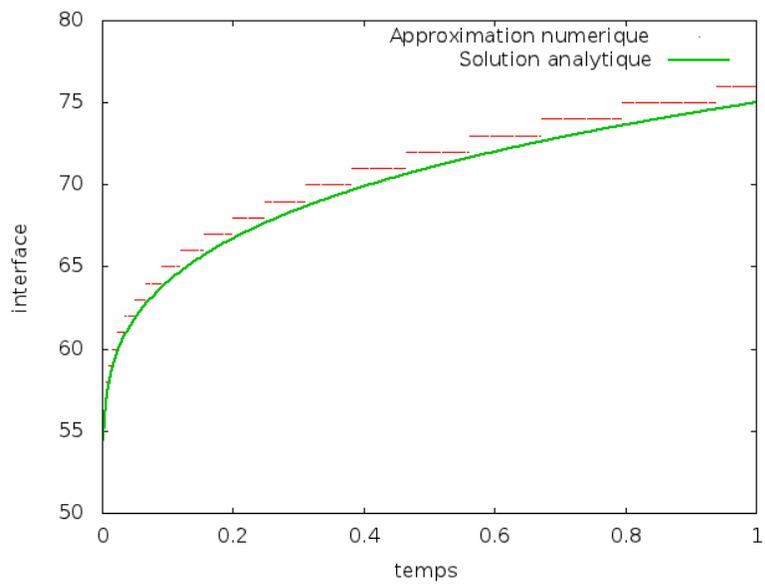


FIGURE 4 – Propagation de front pour la solution de Barenblatt.