Pewne klasyczne twierdzenia geometrii algebraicznej w ujęciu torycznym

Jacek Jendrej

Maj 2011

Streszczenie

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest podanie dowodów kilku klasycznych twierdzeń geometrii algebraicznej w okrojonej wersji, mianowicie dla rozmaitości (i morfizmów) torycznych. Rozpocznę od omówienia rozkładu komórkowego gładkich zupełnych rozmaitości torycznych, by następnie przejść do dwóch powiązanych zagadnień – skończoności morfizmów quasi-skończonych oraz faktoryzacji Steina.

1 Motywacja

Wśród geometrów powszechna jest opinia, że studiowanie przypadku torycznego może znacznie ułatwić sformułowanie ogólnych faktów, nakreślenie planu ich udowodnienia oraz szybkie wyeliminowanie niektórych fałszywych przypuszczeń. Fulton pisze:

> W ogólnej klasyfikacji rozmaitości toryczne są dość specjalnymi obiektami. (...) Mimo wszystko, używanie ich do testowania ogólnych teorii okazało się bardzo owocne.[1]

Stopień komplikacji problemów współczesnej geometrii algebraicznej nie pozwala mi podać tu rzeczywistych przykładów wykorzystania tego podejścia. Mimo to mam nadzieję, że moja praca może posłużyć jako argument za przytoczoną wyżej tezą Fultona. Dowody klasycznych ogólnych twierdzeń wielokrotnie upraszczano w oparciu o nowe teorie, jednakże są one nadal nieporównanie bardziej skomplikowane niż proste kombinatoryczne argumenty świata geometrii torycznej. Zatem nie uda mi się przedstawić „metody torycznej" w geometrii algebraicznej, ale podane przykłady ułatwią być może wyobrażenie sobie, jak taka metoda może funkcjonować.

Dowody podane w tej pracy są w większości oparte na pomysłach zaczerpniętych z wykładu „Rozmaitości toryczne" prowadzonego przez prof. Wiśniewskiego.

[1] „In the general classification scheme, these [toric] varieties are very special. (...) Nevertheless, toric varieties have provided a remarkably fertile testing ground for general theories." [4, s. ix]

2 Wprowadzenie

2.1 Oznaczenia i definicje

Dla danego torusa zespolonego $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ oznaczamy:

- $M \simeq \mathbb{Z}^n$ – krata charakterów $\mathbb{T}$; dla $u = (u_1, \dots, u_n) \in M$ przez χ^u oznaczamy charakter $\mathbb{T} \ni (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1^{u_1} \dots t_n^{u_n} \in \mathbb{C}^*$,
- $N \simeq \mathbb{Z}^n$ – dualna krata podgrup jednoparametrowych; dla $v = (v_1, \dots, v_n) \in N$ przez λ^v oznaczamy podgrupę $\mathbb{C}^* \ni t \mapsto (t^{v_1}, \dots, t^{v_n}) \in \mathbb{T}$,
- $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$,
- $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = N_{\mathbb{R}}^*$.

Gdy chcemy podkreślić, jakiej kracie odpowiada dany torus, piszemy $\mathbb{T}_N$.

Mamy naturalne parowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$; dla charakteru $\chi^u : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^*$ i podgrupy jednoparametrowej $\lambda^v : \mathbb{C}^* \to \mathbb{T}$, $u \in M$, $v \in N$, jest wówczas $\chi^u(\lambda^v(t)) = t^{\langle u, v \rangle}$. Ponadto $\mathbb{T} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$.

Niech N będzie kratą i $N' \lhd N$ podkratą skończonego indeksu. Niech $G = N/N'$. Wybierzmy w N i N' bazy $v_1, \dots, v_n$ i $v'_1, \dots, v'_n$ oraz weźmy w M i M' bazy dualne $u_1, \dots, u_n$ i $u'_1, \dots, u'_n$. Wówczas zanurzenie $N' \hookrightarrow N$ jest zadane pewną macierzą $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, zaś dualne do niego przekształcenie $M \to M'$ zadane jest macierzą A^T. W takim razie jest to również zanurzenie i kojądrem jest znowu G.

Z ciągu dokładnego $0 \to M \to M' \to G \to 0$ przez $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathbb{C}^*)$ otrzymujemy ciąg dokładny dla torusów $1 \to G \to \mathbb{T}'_N \to \mathbb{T}_N \to 1$.

Przez $\mathbb{R}_{\geq 0}$ oznaczamy zbiór liczb nieujemnych. Wielościenny stożek wypukły $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ jest *ściśle wypukły*, gdy $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$. W dalszym ciągu wszystkie stożki w $N_{\mathbb{R}}$ są domyślnie ściśle wypukłe.

- Jeśli σ jest stożkiem, a τ jego ścianą, to piszemy $\tau \prec \sigma$.
- Jednowymiarowe ściany $\rho \prec \sigma$ nazywamy *promieniami* stożka σ.
- Przez $N_\sigma \lhd N$ oznaczamy kratę generowaną przez $N \cap \sigma$.
- Przez $\mathrm{relint}(\sigma)$ oznaczamy relatywne wnętrze stożka σ, tzn. wnętrze w topologii przestrzeni $(N_\sigma)_{\mathbb{R}}$.

Stożek σ jest *wymierny*, gdy istnieją $v_1, \dots, v_k \in N$, takie że $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0} v_k$. Równoważnie, dla każdego promienia $\rho \prec \sigma$ mamy $\rho \cap N \neq \{0\}$. W tej sytuacji generator półgrupy $\rho \cap N$ nazywamy *generatorem promienia* ρ. Gdy generatory promieni są liniowo niezależne, stożek nazywamy *symplicjalnym*. Gdy generatory promieni można uzupełnić do bazy kraty N, stożek nazywamy *regularnym*.

Wachlarz Σ to skończony niepusty zbiór stożków ściśle wypukłych w $N_{\mathbb{R}}$, przy czym

- $\sigma \in \Sigma$ i $\tau \prec \sigma \Longrightarrow \tau \in \Sigma$,
- $\sigma_1 \in \Sigma$ i $\sigma_2 \in \Sigma \Longrightarrow \tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Sigma$, $\tau \prec \sigma_1, \tau \prec \sigma_2$.

Sumę mnogościową stożków wachlarza Σ nazywamy jego *nośnikiem* i oznaczamy $|\Sigma|$. Wachlarz nazywamy *zupełnym*, gdy $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$. Przez Σ^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, oznaczamy zbiór k-wymiarowych stożków wachlarza Σ. Wachlarz nazywamy symplicjalnym (regularnym), gdy wszystkie jego stożki są symplicjalne (regularne).

Definicja 2.1. *Rozmaitością toryczną* nazywamy rozmaitość nierozkładalną X zawierającą torus $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ jako podzbiór otwarty, przy czym działanie $\mathbb{T}$ na sobie rozszerza się do działania algebraicznego $\mathbb{T}$ na X.

Półgrupą afiniczną nazywamy skończenie generowaną podpółgrupę kraty M. Dla półgrupy afinicznej S mamy rozmaitość afiniczną $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$, która jest rozmaitością toryczną z torusem $\mathbb{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$ [3, tw. 1.1.17].

Dla stożka (ściśle wypukłego) $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ definiujemy

- *stożek dualny* $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}, \sigma^\vee := \{u \in M_{\mathbb{R}} : \langle u, \sigma \rangle \geq 0\}$,
- *podprzestrzeń ortogonalną* $\sigma^\perp \subset M_{\mathbb{R}}, \sigma^\perp := \{u \in M_{\mathbb{R}} : \langle u, \sigma \rangle = 0\}$,
- *półgrupę afiniczną* $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$.

Jeśli σ jest wymierny, to półgrupa S_σ jest skończenie generowana (tzw. lemat Gordana [4, s. 12]), a co za tym idzie algebra $\mathbb{C}[S_\sigma]$ jest skończenie generowana. Oznaczamy wówczas

- $U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$.

Jest to normalna afiniczna rozmaitość toryczna z torusem $\mathbb{T} = \mathbb{T}_N$ [3, tw. 1.2.18 i 1.3.5].

Stwierdzenie 2.2 ([3, tw. 1.3.12.])**.** *Rozmaitość U_σ jest gładka $\Leftrightarrow$ σ jest regularny.*

Niech Σ będzie wachlarzem w $N_{\mathbb{R}}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ oraz $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Można sprawdzić, że dla $u \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$ mamy $U_{\sigma_1} \supset \left(U_{\sigma_1}\right)_{\chi^u} = U_\tau = \left(U_{\sigma_2}\right)_{\chi^{-u}} \subset U_{\sigma_1}$. Izomorfizmy $g_{ji} : \left(U_{\sigma_i}\right)_{\chi^u} \simeq \left(U_{\sigma_j}\right)_{\chi^{-u}}$ spełniają warunki sklejania i są zgodne z działaniem torusa.

Określamy *rozmaitość toryczną odpowiadającą wachlarzowi* Σ jako

$$X(N, \Sigma) := \left(\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma \right) / \sim_{g_{ji}} .$$

Wówczas $X(N, \Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$ jest $\mathbb{T}$-niezmienniczym pokryciem otwartym, które nazwiemy *standardowym*. Gdy N jest wiadome z kontekstu, zamiast $X(N, \Sigma)$

piszemy $X(\Sigma)$. Można udowodnić [3, tw. 3.1.5.], że $X(\Sigma)$ jest rozmaitością normalną i separowalną.[2] W kolejnych rozdziałach zajmujemy się wyłącznie rozmaitościami torycznymi pochodzącymi od wachlarzy. Na rozmaitościach torycznych mamy dwie naturalne topologie: Zariskiego i klasyczną (rozmaitości zespolonej). Używać będziemy obu; będzie jasne z kontekstu, o którą topologię chodzi w danym momencie.

Rozmaitość jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie elementy jej pokrycia afinicznego są gładkie. Zatem z 2.2 otrzymujemy następującą charakteryzację:

Stwierdzenie 2.3. *Rozmaitość $X = X(N,\Sigma)$ jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy Σ jest wachlarzem regularnym.*

2.2 Klasyfikacja orbit

W dalszym ciągu przydatny okaże się następujący opis punktów afinicznej rozmaitości torycznej (por. [3, stw. 1.3.1]):

Stwierdzenie 2.4. *Niech S będzie półgrupą afiniczną a $V = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S])$ odpowiadającą rozmaitością toryczną. Istnieje naturalna bijekcja między punktami rozmaitości V a homomorfizmami półgrup $S \to \mathbb{C}$, przy czym $\mathbb{C}$ rozpatrujemy z mnożeniem jako działaniem półgrupowym.*

Odpowiedniość zadana jest w ten sposób, że punktowi $p \in V$ przyporządkowujemy homomorfizm $\gamma_p : S \to \mathbb{C}$, gdzie $\gamma_p(u) = \chi^u(p)$. Dla $t \in \mathbb{T}$ mamy więc $\gamma_{t\cdot p}(u) = \chi^u(t \cdot p) = \chi^u(t)\cdot\chi^u(p) = \chi^u(t)\cdot\gamma_p(u)$.

Uwaga 2.5. Rozpatrzmy w V topologię klasyczną, a w przestrzeni homomorfizmów półgrup topologię zbieżności punktowej. Opisane powyżej przyporządkowanie jest wówczas homeomorfizmem, gdyż przekształcenie $V \ni p \mapsto (\chi_1(p),\dots,\chi_k(p))$ wyznacza zanurzenie $V \hookrightarrow \mathbb{C}^k$, o ile tylko χ_i generują $\mathbb{C}[S]$ [4, dowód stw. 1.1.14].

Ustalmy wachlarz Σ. Niech $\sigma \in \Sigma$. Wówczas homomorfizm

$$S_\sigma \ni u \mapsto \begin{cases} 1, & \text{jeśli } u \in S_\sigma \cap \sigma^\perp = M \cap \sigma^\perp \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

określa zgodnie z powyższym stwierdzeniem pewien punkt $p_\sigma \in U_\sigma$. Punkt p_σ nazywamy *punktem wyróżnionym.*

Zauważmy, że dla $t \in \mathbb{T}$ punktowi $t\cdot p_\sigma$ odpowiada homomorfizm

$$S_\sigma \ni u \mapsto \begin{cases} \chi^u(t), & \text{jeśli } u \in M \cap \sigma^\perp \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

[2] Prawdziwe jest też odwrotne twierdzenie – normalna i separowalna rozmaitość toryczna pochodzi od pewnego wachlarza [7, tw. 4.1].

Zatem $\mathrm{Stab}(p_\sigma) \simeq \{\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) : \gamma(M \cap \sigma^\perp) = 1\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/M \cap \sigma^\perp, \mathbb{C}^*)$. $\mathrm{Stab}(p_\sigma)$ jest więc podtorusem $\mathbb{T}_{N_\sigma} \subset \mathbb{T}$.[3]

Odnotujmy na koniec, że jeśli $\tau \prec \sigma$ i $v \in \mathrm{relint}(\sigma)$, to $\lim_{t \to 0} \lambda^v(t) \cdot p_\tau = p_\sigma$.

Twierdzenie 2.6 (O Klasyfikacji Orbit [3, tw. 3.2.6])**.** *Niech Σ będzie wachlarzem w $N_{\mathbb{R}}$. Istnieje bijekcja między orbitami torusa w $X(\Sigma)$ a stożkami,*

$$\sigma \longleftrightarrow \mathbb{O}(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \cap \sigma^\perp, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{T}_{N/N_\sigma}.$$

Orbita $\mathbb{O}(\sigma)$ otrzymuje w ten sposób strukturę grupy (torusa zespolonego), której jednością jest punkt wyróżniony p_σ.

Ponadto $U_\sigma = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \mathbb{O}(\tau)$ oraz $V(\tau) := \overline{\mathbb{O}(\tau)} = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \mathbb{O}(\sigma)$.[4]

W szczególności orbity jednopunktowe odpowiadają stożkom wymiaru n, czyli punkty stałe działania torusa to punkty p_σ dla $\sigma \in \Sigma^n$ (i żadne inne).

2.3 Morfizmy toryczne

W dalszym ciągu badać będziemy tylko takie morfizmy, które zachowują strukturę toryczną.

Ustalmy kraty N_1, N_2, wachlarze Σ_1, Σ_2 i rozmaitości toryczne $X_1 = X(N_1, \Sigma_1)$, $X_2 = X(N_2, \Sigma_2)$.

Definicja 2.7. Morfizm $\phi_* : X_1 \to X_2$ nazywamy *morfizmem torycznym*, jeśli $\phi_*(\mathbb{T}_{N_1}) \subset \mathbb{T}_{N_2}$ i $\phi_*|_{\mathbb{T}_{N_1}}$ jest homomorfizmem grup.

Morfizm toryczny ϕ_* daje diagram przemienny [3, stw. 1.3.14]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}_{N_1} \times X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*|_{\mathbb{T}_{N_1}} \times \phi_*"'] & X_1 \arrow[d, "\phi_*"] \\
\mathbb{T}_{N_2} \times X_2 \arrow[r] & X_2
\end{tikzcd}$$

gdzie poziome strzałki są działaniem torusa na odpowiedniej rozmaitości.

Homomorfizm $\phi : N_1 \to N_2$ indukuje homomorfizm przestrzeni liniowych $\phi_{\mathbb{R}} := \phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (N_1)_{\mathbb{R}} \to (N_2)_{\mathbb{R}}$ oraz homomorfizm torusów $\phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{T}_{N_1} \to \mathbb{T}_{N_2}$.

Definicja 2.8. Homomorfizm krat $\phi : N_1 \to N_2$ nazywamy *zgodnym* z wachlarzami Σ_1, Σ_2, jeśli dla każdego stożka $\sigma_1 \in \Sigma_1$ istnieje taki stożek $\sigma_2 \in \Sigma_2$, że $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$.

[3]Jak to zostanie powiedziane w kolejnym twierdzeniu, każda orbita zawiera dokładnie jeden punkt wyróżniony. Zatem z przeprowadzonej analizy wynika, że stabilizator dowolnego punktu (nie tylko wyróżnionego) jest podtorusem $\mathbb{T}$.

[4]Można wykazać, że $V(\tau)$ jest rozmaitością toryczną z torusem $\mathbb{T}_\tau \simeq \mathbb{O}(\tau)$, a jej wachlarzem jest tzw. *gwiazda* stożka τ [3, stw. 3.2.7]. Nie będę jednak z tego korzystał.

Twierdzenie 2.9 ([3, tw. 3.3.4]). *Jeśli $\phi : N_1 \to N_2$ jest homomorfizmem zgodnym z wachlarzami Σ_1, Σ_2, to odwzorowanie $\phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{T}_{N_1} \to \mathbb{T}_{N_2}$ rozszerza się do morfizmu torycznego $\phi_* : X_1 \to X_2$. Odwrotnie, każdy morfizm toryczny $\phi_* : X_1 \to X_2$ powstaje w ten sposób z pewnego homomorfizmu krat zgodnego z wachlarzami Σ_1, Σ_2.*

W dalszym ciągu, gdy pojawiają się symbole ϕ i ϕ_*, zawsze oznaczają one homomorfizm krat i odpowiadający mu morfizm toryczny.

Oczywiście obraz orbity przy morfizmie torycznym musi być zawarty w pewnej orbicie X_2. Orbitę tą można konkretnie wskazać.

Stwierdzenie 2.10 ([3, lem. 3.3.21]). *Niech $\phi_* : X_1 \to X_2$ będzie morfizmem torycznym. Niech $\sigma_1 \in \Sigma_1$ i niech $\sigma_2 \in \Sigma_2$ będzie minimalnym stożkiem, takim że $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$. Wówczas*

- $\phi_*(p_{\sigma_1}) = p_{\sigma_2}$,
- $\phi_*(\mathbb{O}(\sigma_1)) \subset \mathbb{O}(\sigma_2)$.[5]

Przy zwykłych izomorfizmach $\mathbb{O}(\sigma_1) \simeq \mathbb{T}_{N_1/N_{\sigma_1}}$ oraz $\mathbb{O}(\sigma_2) \simeq \mathbb{T}_{N_2/N_{\sigma_2}}$ odwzorowanie $\phi_*|_{\mathbb{O}(\sigma_1)} : \mathbb{O}(\sigma_1) \to \mathbb{O}(\sigma_2)$ pochodzi przy tym od indukowanego przez ϕ homomorfizmu krat $\widetilde{\phi} : N_1/N_{\sigma_1} \to N_2/N_{\sigma_2}$.

Twierdzenie 2.11 (O morfizmach właściwych). *Niech $\phi_* : X_1 \to X_2$ będzie morfizmem torycznym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *ϕ_* jest morfizmem właściwym,*
2. *$\phi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Sigma_2|) = |\Sigma_1|$.*

Dowód tego faktu nie jest prosty (por. [3, tw. 3.4.7]).

Wniosek 2.12 (Charakteryzacja zupełnych rozmaitości torycznych). *Niech $X = X(N, \Sigma)$ będzie rozmaitością toryczną. Następujące warunki są równoważne:*

1. *X jest rozmaitością zupełną,*
2. *$|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$.*

Dowód. Zupełność X jest równoważna temu, że morfizm $\phi_* : X \to X(\{0\})$ w (toryczną) rozmaitość jednopunktową jest właściwy, co na mocy charakteryzacji morfizmów właściwych daje tezę. □

[5] Prawdą jest również, że $\phi_*(V(\sigma_1)) \subset V(\sigma_2)$ i $\phi_*|_{V(\sigma_1)}$ jest morfizmem torycznym.

3 Rozkład ABB

W tym rozdziale omówię rozkłady gładkich rozmaitości zupełnych na sumę rozłączną przestrzeni afinicznych. Bezpośrednią motywacją jest twierdzenie A. Białynickiego-Biruli. Mówi ono, że gdy grupa $G = k^*$ działa na rozmaitości zupełnej i gładkiej X nad ciałem k, przy czym zbiór punktów stałych składa się z punktów izolowanych, to X rozkłada się na podzbiory niezmiennicze, z których każdy jest izomorficzny z przestrzenią wektorową (por. [1, tw. 4.4]). W naszym przypadku na rozmaitości działa większa grupa $\mathbb{T}$, co znacznie upraszcza analizę.

Przykład 3.1. Przestrzeń rzutowa rozkłada się na część afiniczną i hiperpłaszczyznę w nieskończoności:

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{CP}^{n-1} = \mathbb{C}^n \sqcup \left(\mathbb{C}^{n-1} \sqcup \mathbb{CP}^{n-2}\right) = \cdots = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathbb{C}^k.$$

Zobaczymy, że analogiczny rozkład można uzyskać dla każdej gładkiej rozmaitości torycznej zupełnej.

Niech N będzie kratą rangi n, zaś Σ wachlarzem w $N_\mathbb{R}$. Oznaczmy $\mathscr{H} = \{H_\tau\}_{\tau \in \Sigma^{n-1}}$ – zbiór hiperpłaszczyzn rozpinanych przez stożki $\tau \in \Sigma^{n-1}$.

Definicja 3.2. Wektor $v \in N_\mathbb{R}$ nazwiemy *ogólnym* dla wachlarza Σ, jeśli $v \notin \bigcup \mathscr{H}$.

Dla $\sigma \in \Sigma^n$ i $v \in N$ oznaczmy

$$W^+_{\sigma,v} := \{p \in X(\Sigma) : \lim_{t\to 0} \lambda^v(t) \cdot p = p_\sigma\}.$$

W przypadku, gdy $X(\Sigma)$ jest rozmaitością gładką, niech σ będzie stożkiem rozpinanym przez promienie $\rho_1, \ldots, \rho_n$, i niech $0 \neq v_i \in \rho_i$. Dla $v \in N_\mathbb{R}$ napiszmy $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}$. Oznaczmy

$$l^+_{\sigma,v} := |\{i : a_i > 0\}|.$$

Podkreślmy, że oznaczenie $l^+_{\sigma,v}$ stosować będziemy tylko w sytuacji, gdy $X(\Sigma)$ jest rozmaitością gładką. Odnotujmy też, że podczas gdy oznaczenie $W^+_{\sigma,v}$ wprowadzamy tylko dla $v \in N$, $l^+_{\sigma,v}$ ma sens (i będziemy z tego korzystać) dla $v \in N_\mathbb{R}$, i w ogóle nie zależy od kraty N.

Bezpośrednio z definicji jest jasne, że jeśli $\sigma_1 \neq \sigma_2$, to $W^+_{\sigma_1,v} \cap W^+_{\sigma_2,v} = \emptyset$. Zauważmy też, że $W^+_{\sigma,v}$ jest zbiorem $\mathbb{T}$-niezmienniczym zawierającym dokładnie jeden punkt stały działania torusa.

Lemat 3.3. *Niech $X = X(\Sigma)$ będzie rozmaitością gładką. Jeśli $v \in N$ jest wektorem ogólnym, to $W^+_{\sigma,v} \simeq \mathbb{C}^{l^+_{\sigma,v}}$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że $W^+_{\sigma,v} \subset U_\sigma$. Jest tak, ponieważ U_σ jest otoczeniem p_σ w topologii Zariskiego, a więc tym bardziej w klasycznej. Zatem jeśli $\lim_{t\to 0} \lambda^v(t) \cdot p = p_\sigma$, to w szczególności dla pewnego $t \in \mathbb{C}^*$ mamy $\lambda^v(t) \cdot p \in U_\sigma$. Ale U_σ jest $\mathbb{T}$-niezmiennicze. Stąd $p \in U_\sigma$.

Redukcja do rozmaitości afinicznej U_σ pozwala wykorzystać opis punktów jako homomorfizmów półgrup (stw. 2.4). Przypomnijmy, że dla $t \in \mathbb{C}^*$ punktowi $\lambda^v(t) \cdot p$ odpowiada homomorfizm

$$S_\sigma \ni u \mapsto \chi^u(\lambda^v(t))\chi^u(p) = t^{\langle u,v\rangle}\chi^u(p) \in \mathbb{C}.$$

W takim razie, na mocy uwagi 2.5, mamy

$$p \in W^+_{\sigma,v} \Leftrightarrow \left(\chi^u(p) = 0 \text{ dla } \langle u,v\rangle < 0 \text{ lub } \langle u,v\rangle = 0, u \neq 0\right).$$

Niech dla $i = 1,\dots,n$ wektor $v_i \in N$ będzie generatorem promienia ρ_i, przy czym w przedstawieniu $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ współczynniki $a_1,\dots,a_{l^+_{\sigma,v}}$ są dodatnie, a pozostałe ujemne (zera nie występują, bo v jest wektorem ogólnym). Z założenia σ jest stożkiem regularnym, więc $(v_1,\dots,v_n)$ jest bazą kraty N. Niech $(u_1,\dots,u_n)$ będzie dualną bazą kraty M. Zauważmy, że

$$\{p : \chi^u(p) = 0 \text{ dla } \langle u,v\rangle < 0 \text{ lub } \langle u,v\rangle = 0, u \neq 0\} = \left\{p : \chi^u(p) = 0 \text{ dla } u \in \{u_{l^+_{\sigma,v}+1},\dots,u_n\}\right\}.$$

Inkluzja $\subset$ jest oczywista. Inkluzja $\supset$ wynika stąd, że jeśli $\langle u,v\rangle < 0$ lub $\langle u,v\rangle = 0, u \neq 0$, to rozpisując wektor u, w bazie $(u_i)_{i=1}^n$, musimy dostać co najmniej jeden spośród wektorów $u_{l^+_{\sigma,v}+1},\dots,u_n$ z niezerowym współczynnikiem.

Ale $\left\{p : \chi^u(p) = 0 \text{ dla } u \in \{u_{l^+_{\sigma,v}+1},\dots,u_n\}\right\} \simeq \mathbb{C}^{l^+_{\sigma,v}}$. □

Uwaga 3.4. Z dowodu widać od razu, że $W^+_{\sigma,v}$ jest domkniętym podzbiorem U_σ.

Lemat 3.5. *Niech $X = X(\Sigma)$ będzie rozmaitością zupełną. Wówczas, jeśli $v \in N$ jest ogólny, to*

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma^n} W^+_{\sigma,v} = X.$$

Dowód. Weźmy dowolny punkt $p \in X$, i niech należy on do orbity odpowiadającej stożkowi τ. Niech $w \in \operatorname{relint}(\tau)$. Z ogólności v wynika, że istnieje takie $\sigma \in \Sigma^n$, że dla dostatecznie małych $a > 0$ mamy $w + av \in \operatorname{relint}(\sigma)$. Uzasadnię, że wówczas $p \in W^+_{\sigma,v}$.

Stożek τ jest ścianą stożka σ, więc $p \in U_\sigma$. Tak jak poprzednio redukujemy więc całą sytuację do afinicznego U_σ. Ponieważ zbiory $W^+_{\sigma,v}$ są $\mathbb{T}$-niezmiennicze, to dla wygody można punkt p zastąpić punktem wyróżnionym z tej samej orbity, tzn. $p = p_\tau$. Wówczas punktowi $\lambda^v(t) \cdot p$ odpowiada homomorfizm

$$S_\sigma \ni u \mapsto \begin{cases} t^{\langle u,v\rangle}, & \text{jeśli } u\perp\tau \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$$

Pozostaje uzasadnić, że jeśli $\tau\perp u \in S_\sigma \setminus \{0\}$, to $\langle u,v\rangle > 0$. Ale to jest jasne, gdyż $u \in \sigma^\vee \setminus \{0\}$, więc dla małych $a > 0$ mamy $\langle u, w + av\rangle > 0$. Stąd zaś $\langle u,v\rangle > 0$, gdyż z założenia $\langle u,w\rangle = 0$. □

Lemat 3.3 mówi, że zbiory $W^+_{\sigma,v}$ są izomorficzne z $\mathbb{C}^k$, ale niekoniecznie pokrywają całą rozmaitość. Z kolei z lematu 3.5 wiemy, że w przypadku rozmaitości zupełnej dostajemy rozkład, jednak nie umiemy tak prosto opisać zbiorów $W^+_{\sigma,v}$.

Łącząc uwagi po definicji 3.2, lemat 3.3, uwagę 3.4 i lemat 3.5 otrzymujemy następujące

Stwierdzenie 3.6. *Niech $X = X(\Sigma)$ będzie rozmaitością gładką i zupełną. Wówczas dla każdego wektora ogólnego v mamy rozkład na $\mathbb{T}$-niezmiennicze podzbiory lokalnie domknięte:*

$$X = \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma^n} \mathbb{C}^{l^+_{\sigma,v}}.$$

Ponadto każdy ze składników tej sumy zawiera dokładnie jeden punkt stały działania torusa.

Łącząc składniki jednakowego wymiaru rozkład ten możemy zapisać w postaci

$$X = \bigsqcup_{d=0}^{n} b_{2d,v}\mathbb{C}^d, \tag{1}$$

gdzie $b_{2d,v} = \left|\{\sigma \in \Sigma^n : l^+_{\sigma,v} = d\}\right|$. Sam rozkład zależy od wyboru wektora v. Jednak współczynniki $b_{2d} = b_{2d,v}$ zależą, jak się okazuje, tylko od wachlarza. Wynika to łatwo z następującego lematu z rzeczywistej algebry liniowej:

Stwierdzenie 3.7. *Jeśli Σ jest wachlarzem symplicjalnym zupełnym w $N_\mathbb{R}$, a $v, w \in N_\mathbb{R}$ wektorami ogólnymi, to dla $d = 0, 1, \dots, n$ zachodzi równość $b_{2d,v} = b_{2d,w}$.*

Dowód. Przypomnijmy, że przez $\mathscr{H}$ oznaczyliśmy zbiór hiperpłaszczyzn H_τ rozpinanych przez stożki $\tau \in \Sigma^{n-1}$. Dostatecznie mała deformacja wachlarza nie zmienia tezy (wystarczy, że deformacja będzie na tyle niewielka, żeby oba wektory cały czas pozostawały ogólne). Można więc założyć, że wachlarz jest ogólny w tym sensie, że $H_\tau \neq H_{\tau'}$ dla $\tau \neq \tau'$.

Połączmy v i v' drogą $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H\neq H'\in\mathscr{H}} H \cap H'$ (korzystam tu z łatwego faktu, że $\mathbb{R}^n$ pozostaje łukowo spójne po usunięciu skończonej liczby podprzestrzeni liniowych kowymiaru ≥ 2). Jest jasne, że dla $\gamma(t) \notin \bigcup\mathscr{H}$ $b_{2d,\gamma(t)}$ jest stałe (bo stałe są współczynniki wektora $\gamma(t)$ względem dowolnego stożka $\in \Sigma^n$). Niech t_0 będzie takie, że $\gamma(t_0) \in H$ dla pewnego $H \in \mathscr{H}$. Niech H będzie rozpięte przez promienie $v_2, \dots, v_n$ – krawędzie ściany $\sigma \cap \sigma'$, gdzie $\sigma, \sigma' \in \Sigma^n$, $\sigma = \langle v_1, v_2, \dots, v_n\rangle, \sigma' = \langle v_1', v_2, \dots, v_n\rangle$ (korzystamy tu z zupełności, żeby stwierdzić, że stożek wymiaru $n-1$ jest wspólną ścianą dwóch stożków wymiaru n). W tej sytuacji znaki współczynników $\gamma(t)$ względem stożków innych niż σ i σ' w pobliżu t_0 pozostają stałe. Rozważmy więc współczynniki $\gamma(t) = a_1(t)v_1 + \sum_{i=2}^n a_i(t)v_i = a_1'(t) + \sum_{i=2}^n a_i'(t)v_i$. Funkcje a_i, a_i' są ciągłe oraz $a_i(t_0) = a_i'(t_0) \neq 0$ dla $i = 2, \dots, n$. W takim razie w pobliżu punktu t_0 $\operatorname{sgn}(a_i) = \operatorname{sgn}(a_i')$ dla $i \neq 1$.

Pozostaje rozpatrzeć a_1 i a_1'. Wektory v_1 i v_1' leżą po różnych stronach hiperpłaszczyzny H. Zatem a_1' ma zawsze znak przeciwny do a_1. Jeśli więc na przykład w punkcie t_0 a_1 zmienia znak z dodatniego na ujemny, to a_1' zmienia znak z ujemnego na dodatni, tak więc liczba stożków, względem których $\gamma(t)$ ma ustaloną liczbę dodatnich współczynników, pozostaje niezmieniona. □

Wniosek 3.8. *Dla $d = 0, 1, \ldots, n$ mamy $b_{2n-2d} = b_{2d}$.*

Dowód. Każdy współczynnik wektora v rozpisanego w bazie odpowiadającej dowolnemu stożkowi $\sigma \in \Sigma$ jest dodatni albo ujemny. Współczynników tych jest dokładnie n, więc $l^+_{\sigma,-v} + l^+_{\sigma,v} = n$. W takim razie $b_{2n-2d} = \left|\{\sigma \in \Sigma : l^+_{\sigma,-v} = d\}\right|$, i teza wynika z ostatniego stwierdzenia dla $w = -v$. □

Uwaga 3.9. Ostatni wniosek można też uzyskać rozważając $X(\Sigma)$ jako kompleks komórkowy. Wydzielone przez nas komórki mają parzyste (rzeczywiste) wymiary. Stąd otrzymujemy $\widetilde{b}_{2d} = b_{2d}$ oraz $\widetilde{b}_{2d+1} = 0$, gdzie $\widetilde{b}_i$ jest i-tą liczbą Bettiego rozmaitości $X(\Sigma)$ (np. [5, s. 140]). Rozmaitość ta jest orientowalna, więc wniosek 3.8 wynika z dualności Poincaré.

4 Morfizmy skończone

W kategorii torycznej morfizmów skończonych jest, jak się okazuje, niewiele. Udowodnimy mianowicie następujące

Stwierdzenie 4.1. *Niech $\phi : N' \to N$ będzie homomorfizmem krat, a $\phi_* : X(N', \Sigma') \to X(N, \Sigma)$ odpowiadającym morfizmem torycznym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *ϕ_* jest skończony,*
2. *ϕ_* jest surjektywny, właściwy i ma skończone włókna,*
3. *ϕ jest zanurzeniem z torsyjnym kojądrem oraz $\phi_{\mathbb{R}}$ wyznacza bijekcję między stożkami wachlarzy Σ i Σ'.*

Równoważność 1. ⇔ 2. zachodzi nie tylko dla rozmaitości torycznych. Ogólny przypadek jest blisko związany z zagadnieniem faktoryzacji Steina, której poświęcony jest następny rozdział.

Dowód. 1. ⇒ 2. — Jest to znany ogólny fakt (np. [8, s. 62]).[6]

3. ⇒ 1. — Rozpatrzmy standardowe pokrycie otwarte $X(\Sigma') = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma'} U_{\sigma'}$. Na mocy 2.6 i 2.10 $\phi_*^{-1}(U_{\sigma'}) = U_\sigma$, gdzie $\sigma = \phi_{\mathbb{R}}^{-1}(\sigma') \in \Sigma$. Zanurzenie $\mathbb{C}[U_\sigma] \hookrightarrow \mathbb{C}[U'_\sigma]$ wyznaczone jest przez zanurzenie krat charakterów $M \hookrightarrow M'$, które ma z założenia torsyjne kojądro. Zatem dla każdego charakteru $\chi = \chi^u \in \mathbb{C}[U'_\sigma]$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $ku \in M$, a więc $\chi^k \in \mathbb{C}[U_\sigma]$, czyli rozszerzenie pierścieni współrzędnych jest całkowite.

[6] Jest tam udowodnione, że morfizm skończony jest domknięty. Jest to tylko pozornie słabsza teza, gdyż jeśli odwzorowanie $\phi : X \to Y$ jest skończone, to $\phi \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ również, dla każdego Z. Stąd $\phi \times \mathrm{id}_Z$ jest domknięte, czyli ϕ – właściwe.

2. $\Rightarrow$ 3. — W szczególności $\phi_* : \mathbb{T}_N \to \mathbb{T}_{N'}$ musi być surjekcją o skończonych włóknach, a co za tym idzie $\phi : N \to N'$ jest zanurzeniem z torsyjnym kojądrem i $\phi_\mathbb{R}$ jest izomorfizmem. Przypuśćmy, że $\phi_\mathbb{R}$ nie wyznacza bijekcji na stożkach, i niech $\sigma \in \Sigma$ będzie takie, że $\phi(\sigma) \subsetneq \sigma' \in \Sigma'$, gdzie σ' jest najmniejszym stożkiem zawierającym $\phi_\mathbb{R}(\sigma)$. Wówczas (stw. 2.10) $\phi_*(\mathbb{O}(\sigma)) = \mathbb{O}(\sigma')$, więc z warunku skończonych włókien $\dim\sigma = \dim\sigma'$. Niech $x \in \operatorname{relint}(\phi_\mathbb{R}(\sigma))$, $y \in \sigma' \setminus \phi_\mathbb{R}(\sigma)$. Wówczas odcinek (x, y) zawiera się w $\operatorname{relint}(\sigma')$ i przebija pewną ścianę $\phi_\mathbb{R}(\tau) \prec \phi_\mathbb{R}(\sigma), \tau \prec \sigma$. Stąd wynika, że $\operatorname{relint}(\phi_\mathbb{R}(\tau)) \subset \operatorname{relint}(\sigma')$, czyli $\phi_*(\mathbb{O}(\tau)) = \mathbb{O}(\sigma')$, co przeczy założeniu o skończoności włókien, gdyż $\dim\tau < \dim\sigma = \dim\sigma'$. □

Niech $\phi_* : X(N', \Sigma') \to X(N, \Sigma)$ będzie morfizmem skończonym. Homomorfizm ϕ identyfikuje wówczas N' z podkratą N i mamy $N'_\mathbb{R} = N_\mathbb{R}, \phi_\mathbb{R} = \mathrm{id}$. Zatem przy tej identyfikacji po prostu $\Sigma' = \Sigma$. Od tej pory zawsze będziemy patrzeć na toryczne morfizmy skończone w ten właśnie sposób.

4.1 Odwzorowania skończone a nakrycia

Odejdziemy na chwilę od głównego wątku, żeby zbadać zależność między odwzorowaniami torycznymi skończonymi a nakryciami w sensie topologicznym.

Definicja 4.2. Niech $X = X(\Sigma)$. Niech $X^{(1)} \subset X$ będzie sumą orbit kowymiaru ≤ 1. Morfizm toryczny skończony $\phi_* : X' \to X$ nazwiemy *nakryciem w kowymiarze 1*, gdy indukowany morfizm $\phi_*^{(1)} : \phi_*^{-1}\left(X^{(1)}\right) \to X^{(1)}$ jest nakryciem w sensie topologicznym.

Homomorfizm $(\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ o jądrze skończonym jest nakryciem topologicznym. Fakt ten wykorzystamy, aby udowodnić

Stwierdzenie 4.3 (Charakteryzacja nakryć w kowymiarze 1)**.** *Morfizm toryczny skończony $\phi_* : X' \to X$ jest nakryciem w kowymiarze 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $N \cap \rho = N' \cap \rho$ dla każdego promienia $\rho \in \Sigma$ (przy naszej stałej konwencji $\phi_\mathbb{R} = \mathrm{id}_{N_\mathbb{R}}$).*

Dowód. Niech najpierw $N \cap \rho = N' \cap \rho$. Jeśli $\Sigma = \Sigma^0$ (tzn. wachlarz składa się tylko ze stożka jednopunktowego), teza jest oczywista. Jeśli jest inaczej, to $\{U_\rho\}_{\rho\in\Sigma^1}$ stanowi pokrycie otwarte $X^{(1)}$, więc wystarczy udowodnić tezę dla U_ρ, tzn. rozmaitości, której wachlarz składa się z pojedynczego promienia. Mamy $\phi_*^{-1}(U_\rho \subset X) = U'_\rho \subset X'$ i indukowany morfizm $\phi_*|_{U'_\rho}$ pochodzi od homomorfizmu krat $N' = \widetilde{N'} \times \mathbb{Z} \to \widetilde{N} \times \mathbb{Z} = N$, które jest zanurzeniem z torsyjnym kajądrem na pierwszej współrzędnej, a identycznością na drugiej. Odpowiada to odwzorowaniu rozmaitości $(\mathbb{C}^*)^{n-1} \times \mathbb{C} \to (\mathbb{C}^*)^{n-1} \times \mathbb{C}$, które jest identycznością na drugiej współrzędnej. Odwzorowanie takie jest nakryciem w sensie topologicznym.

Teraz odwrotnie, niech $\phi_*^{(1)}$ będzie nakryciem. Wówczas w szczególności $\phi_*^{(1)}|_{U'_\rho}$ jest nakryciem. Oznaczmy $N_1 = N \cap \rho$, $N'_1 = N' \cap \rho$ i przypuśćmy, że $N'_1 \subsetneq N_1$. U_ρ i U'_ρ są zbiorami łukowo spójnymi, więc włókna mają stałą moc. Na torusie jest to indeks N' w N. Z drugiej strony, indukowane odwzorowanie orbit kowymiaru

1 $\mathbb{O}(\rho)' \to \mathbb{O}(\rho)$ jest wyznaczone przez indukowane zanurzenie krat $N'/N_1' \hookrightarrow N/N_1$. Jednak skoro $N_1' \neq N_1$, indeks N'/N_1' w N/N_1 jest mniejszy niż indeks N' w N. Zatem na tej orbicie indeks jest mniejszy niż na torusie, więc odwzorowanie nie może być nakryciem. □

Niech $\Sigma^1 = \{\rho_1, \dots, \rho_p\}$ i niech, jak zwykle, v_i będzie generatorem promienia ρ_i. Definiujemy $\widehat{M}$ (tzw. kratę $\mathbb{T}$-niezmienniczych dywizorów Weila) jako wolną grupę abelową generowaną przez $\rho_1, \dots, \rho_p$ (zatem $\widehat{M} \simeq \mathbb{Z}^p$). Mamy naturalne włożenie $M \hookrightarrow \widehat{M}$, $u \mapsto (\langle u, v_1 \rangle, \dots, \langle u, v_p \rangle)$.

Stwierdzenie 4.4 ([3, tw. 4.1.6])**.** *Niech* $|\Sigma|$ *rozpina* $N_{\mathbb{R}}$*. Wówczas* $\mathrm{Cl}(X(\Sigma)) = \widehat{M}/M$.

Stwierdzenie 4.5. *Niech* $N^{(1)} \lhd N$ *będzie podkratą rozpiętą przez generatory promieni wachlarza* Σ*. Jeśli* $N/N^{(1)}$ *jest grupą skończoną, to jest to część torsyjna grupy klas rozmaitości* $X(\Sigma)$*.*

Dowód. Niech $M^{(1)} = \widehat{M} \cap M_{\mathbb{R}}$. Mamy $\widehat{M}/M = \widehat{M}/M^{(1)} \oplus M^{(1)}/M$. Pierwszy składnik stanowi część beztorsyjną, zaś drugi torsyjną. Pozostaje uzasadnić, że kratą dualną do $M^{(1)}$ jest $N^{(1)}$. Jednak $M^{(1)}$ to dokładnie te elementy $\widehat{M}$, których pewna wielokrotność jest w M. $M^{(1)}$ możemy więc utożsamić z tymi liniowymi funkcjami wymiernymi na N, które w punktach v_i przyjmują wartości całkowite. A to jest to samo, co po prostu funkcje całkowite na $N^{(1)}$. □

Stwierdzenie 4.6 ([2, lem. 4.7])**.** $\pi_1\left(X^{(1)}\right) = N/N^{(1)}$.[7]

Przestrzeń $X^{(1)}$ jest łukowo spójna, lokalnie łukowo spójna i lokalnie jednospójna, gdyż każdy z elementów jej pokrycia afinicznego $\{\mathbb{T}\} \cup \{U_\rho\}_{\rho \in \Sigma^1}$ jest taki. Zatem, skoro grupa podstawowa jest abelowa, spójne nakrycia są w bijekcji z jej podgrupami. Z powyższego stwierdzenia wynika więc, że każde topologiczne nakrycie spójne rozmaitości $X(\Sigma)$ jest izomorficzne (oczywiście w sensie topologicznym) z pewnym nakryciem „torycznym", tzn. powstającym w sposób opisany w stwierdzeniu 4.1 dla pewnej pośredniej podkraty N', gdzie $N^{(1)} \lhd N' \lhd N$. Mianowicie, podgrupie $G \lhd \pi_1\left(X^{(1)}\right) = N/N^{(1)}$ przypisujemy podkratę $N' = G + N^{(1)}$. W szczególności, nakrycie uniwersalne w kowymiarze 1 otrzymujemy dla podkraty $N' = N^{(1)}$. Jak wynika ze stwierdzenia 4.5, charakteryzuje się ono beztorsyjną grupą klas.

5 Faktoryzacja Steina

Twierdzenie Steina o faktoryzacji zapewnia istnienie rozkładu morfizmu właściwego ϕ na $\phi = \phi_{\text{fin}} \circ \phi_{\text{cont}}$, gdzie ϕ_{fin} jest morfizmem skończonym, a ϕ_{cont} ma włókna spójne (w topologii Zariskiego); por. np. [6, tw. 2.26 i uwaga po nim]. O

[7] Grupę podstawową w kowymiarze 1 można zdefiniować także ogólnie; por. [2], gdzie jest również udowodnione, że w przypadku torycznym otrzymujemy $\pi_1\left(X^{(1)}\right)$.

jednym kluczowym wniosku z tego twierdzenia było już wspomniane przy okazji stwierdzenia 4.1. Przypomnijmy, że przez p_σ oznaczamy punkt wyróżniony orbity $\mathbb{O}(\sigma)$ (zob. tw. 2.6).

Lemat 5.1. *Niech $U_\sigma, U_{\sigma'}$ będą afinicznymi rozmaitościami torycznymi, $\sigma \subset N_\mathbb{R}, \sigma' \subset N'_\mathbb{R}$. Niech $\phi_* : U_\sigma \to U_{\sigma'}$ będzie morfizmem. Niech $\tau \prec \sigma$ i załóżmy, że $\phi_*(p_\tau) = \phi_*(p_\sigma) = p_{\sigma'}$. Wówczas p_σ i p_τ leżą w tej samej spójnej składowej zbioru $\phi_*^{-1}(p_{\sigma'})$ (w klasycznej topologii).*

Dowód. Weźmy dowolne $v \in \mathrm{relint}(\sigma)$ i rozważmy podgrupę jednoparametrową $\lambda^v(t)$. Wówczas $\lim_{t\to 0} \lambda^v(t) \cdot p_\tau = p_\sigma$. Z drugiej strony, $\phi(v) \in \sigma'$, więc $p_{\sigma'}$ jest punktem stałym działania obrazu rozpatrywanej podgrupy. Ta uwaga kończy dowód, gdyż włókna są domknięte. □

Poprzedni lemat pokazuje, jak „łączyć we włóknach” wyróżnione punkty różnych orbit. Zatem za niespójność włókien może być odpowiedzialny tylko sposób odwzorowania torusów. Precyzyjniej wysławia to poniższy, kluczowy dla tej części,

Lemat 5.2. *Niech $\phi : (N, \Sigma) \to (N', \Sigma')$ będzie morfizmem wachlarzy, takim że odpowiadający homomorfizm krat jest epimorfizmem. Jeśli odpowiadający morfizm $\phi_* : X(\Sigma) \to X(\Sigma')$ jest właściwy, to jego włókna są spójne w klasycznej topologii.*

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że wystarczy badać przeciwobrazy punktów wyróżnionych, bowiem $\phi_*^{-1}(g'p') = g\phi_*^{-1}(p')$, gdzie $\phi_*(g) = g'$. Działanie elementu g jest homeomorfizmem, więc spójność $\phi_*^{-1}(g'p')$ jest równoważna spójności $\phi_*^{-1}(p')$. Ponadto jeśli $\phi_*^{-1}(p_{\sigma'}) \cap \mathbb{O}(\sigma) \neq \emptyset$, to $\phi_*(p_\sigma) \in \mathbb{O}(\sigma')$, więc na mocy lematu 2.10 $\phi_*(p_\sigma) = p_{\sigma'}$.

Ciąg dokładny $0 \to N'' \to N \to N' \to 0$ rozszczepia się, dając

$$N = N'' \times N',$$

przy czym ϕ jest rzutowaniem na drugi czynnik. Stąd z kolei dostajemy

$$\mathbb{T}_N = \mathbb{T}_{N''} \times \mathbb{T}_{N'},$$

przy czym ϕ_* jest rzutowaniem na drugi czynnik.

Ustalmy punkt $p_{\sigma'} \in X(\Sigma')$ i rozważmy orbitę $\mathbb{O}(\sigma) \subset X(\Sigma)$, $\phi_*(p_\sigma) = p_{\sigma'}$. Niech $G = \{g \in T_N : \phi_*(g p_\sigma) = p_{\sigma'}\}$, tzn. $G = \phi_*^{-1}\big(\mathrm{Stab}(p_{\sigma'})\big)$. Jak to zostało powiedziane w paragrafie 2.2, $\mathrm{Stab}(p_{\sigma'})$ jest podtorusem, a więc w szczególności zbiorem spójnym. Zatem $G = \mathbb{T}_{N''} \times \mathrm{Stab}(p_{\sigma'})$ również. A skoro G jest spójne, to $\mathbb{O}(\sigma) \cap \phi_*^{-1}(p_{\sigma'}) = G p_\sigma$ także.

Niech teraz $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $\phi_*(p_{\sigma_1}) = \phi_*(p_{\sigma_2}) = p_{\sigma'}$. Rozważmy obszar $S = \phi_\mathbb{R}^{-1}(\sigma')$. Morfizm ϕ_* jest właściwy, więc $S \subset |\Sigma|$, zaś po raz kolejny korzystając z lematu 2.10 widzimy, że jeśli $\mathrm{relint}(\sigma) \subset \mathrm{relint}(S)$, to $\phi_*(p_\sigma) = p_{\sigma'}$. Ale zbiór S jest oczywiście wypukły, więc bez trudu połączymy σ_1 i σ_2 ciągiem stożków σ spełniających warunek $\mathrm{relint}(\sigma) \subset \mathrm{relint}(S)$, z których każdy jest ścianą poprzedniego lub następnego. Powołanie się na lemat 5.1 kończy dowód. □

W lemacie 5.4 zobaczymy, że udowodnioną właśnie tezę można odwrócić.

Stwierdzenie 5.3. *Niech* $\phi : (N, \Sigma) \to (N', \Sigma')$ *będzie morfizmem wachlarzy indukującym surjektywne właściwe odwzorowanie rozmaitości torycznych* $\phi_* : X(\Sigma) \to X(\Sigma')$. *Wówczas istnieje rozmaitość toryczna* $X(\Sigma'')$ *oraz odwzorowania surjektywne i właściwe* $\phi_{\text{cont}} : X(\Sigma) \to X(\Sigma'')$ *oraz* $\phi_{\text{fin}} : X(\Sigma'') \to X(\Sigma')$, *takie że*

1. $\phi = \phi_{\text{fin}} \circ \phi_{\text{cont}}$,

2. ϕ_{cont} *ma spójne włókna,*

3. ϕ_{fin} *indukuje morfizm toryczny skończony.*

Dowód. Niech $N'' = \phi(N) \lhd N'$, natomiast $\Sigma'' = \Sigma'$, tylko rozpatrywane z kratą N''. Homomorfizm ϕ indukuje wówczas morfizm wachlarzy $\phi_{\text{cont}} : (N, \Sigma) \to (N'', \Sigma'')$, które ma spójne włókna na mocy lematu 5.2. Natomiast zanurzenie $N'' \hookrightarrow N$ indukuje morfizm $\phi_{\text{fin}} : (N'', \Sigma'') \to (N', \Sigma')$, który jest skończony na mocy stwierdzenia 4.1. □

Udowodnimy na koniec, że rozkład ten jest jednoznaczny.

Lemat 5.4. *Niech* $\phi : (N, \Sigma) \to (N', \Sigma')$ *będzie takim morfizmem wachlarzy, że odpowiadające mu odwzorowanie* $\phi_* : X(\Sigma) \to X(\Sigma')$ *jest surjektywne, właściwe i ma spójne włókna (korzystać będziemy ze spójności w topologii Zariskiego). Wówczas* $\phi : N \to N'$ *jest epimorfizmem.*

Dowód. Zastosujmy do ϕ tezę stwierdzenia 5.3. Dla dowolnego $x \in X(\Sigma')$ mamy skończony zbiór $A = \phi_{\text{fin}}^{-1}(p) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Wówczas $\phi^{-1}(p) = \bigcup_{i=1}^{k} \phi_{\text{cont}}^{-1}(x_p)$ daje rozkład włókna na k rozłącznych zbiorów domkniętych. Zatem $k = 1$, czyli ϕ_{fin}^* jest bijekcją. W szczególności jest bijekcją na torusach, czyli ϕ_{fin} na kratach jest izomorfizmem. Stąd $\phi \simeq \phi_{\text{cont}}$, co kończy dowód. □

Możemy teraz podać ostateczną wersję twierdzenia o faktoryzacji Steina morfizmów torycznych.

Stwierdzenie 5.5. *Rozkład, o jakim mówi stwierdzenie 5.3, jest jedyny.*

Dowód. Niech rozmaitość $X(N'', \Sigma'')$ i odwzorowania $\phi_{\text{fin}}, \phi_{\text{cont}}$ spełniają nasze wymagania. Na mocy uwagi po stwierdzeniu 4.1 możemy założyć, że $N'' \lhd N'$, $\Sigma'' = \Sigma'$ i ϕ_{fin} jest naturalnym zanurzeniem $N'' \hookrightarrow N'$. Na mocy lematu 5.4 $\phi_{\text{cont}} : N \to N''$ jest epimorfizmem, więc musimy mieć $N'' = \phi(N)$. □

Literatura

[1] A. Białynicki-Birula, *Some Theorems on Actions of Algebraic Groups*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 98, No. 3 (Nov., 1973), s. 480-497.

[2] W. Buczyńska, *Fake weighted projective spaces*, `http://arxiv.org/abs/0805.1211v1`.

[3] D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric Varieties*, wersja elektroniczna, `http://www.cs.amherst.edu/~dac/toric.html`.

[4] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, 1993.

[5] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[6] S. Iitaka, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1982.

[7] T. Oda, *Lectures on Torus Embeddings and Applications*, TATA, 1978.

[8] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1, Second Edition*, Springer-Verlag, 1994.