O optymalnym pokryciu zbioru wypukłego pasami

A. Tarski: „Uwagi o stopniu równoważności wielokątów", Parametr vol. 2 (1932)

T. Bang: 'A solution of the "Plank problem"', Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 990–993

K.M. Ball: 'The plank problem for symmetric bodies', Invent. Math. 104 (1991) 535–543

Zadanie rozgrzewkowe

Mamy n wektorów jednostkowych $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$.

Dowieść: $\exists v : \|v\| = 1,\ \forall i\ |\langle u_i, v\rangle| \geq \frac{1}{n}$.

Df. 1) Pasem w $\mathbb{R}^d$ nazwiemy zbiór

$$\{v \in \mathbb{R}^d : |\langle u, v\rangle - m| \leqslant \langle u, u\rangle\}.$$

2) u nazwiemy kierunkiem pasa, a $\|u\|$ ~~pół~~ półszerokością pasa,

3) stroną dodatnią pasa jest zbiór $\{v \in \mathbb{R}^d : \langle u, v\rangle \geq m + \langle u, u\rangle\}$, a ujemną $\{v \in \mathbb{R}^d : \langle u, v\rangle \leq m - \langle u, u\rangle\}$.

Df. Niech $C \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem wypukłym.

Szerokością C nazywamy inf dystansu między równoległymi hiperpłaszczyznami, pomiędzy którymi leży zbiór C.

Alternatywnie, inf szerokości pasów zawierających C.

Plank problem: Udowodnić, że zbioru wypukłego szerokości 2 nie można pokryć pasami o sumie półszerokości < 1.

Techniczne założenie: Zbiór ma być zwarty.

Zatem zadanie rozgrzewkowe jest szczególnym przypadkiem.

Problem Czy stałą $\frac{1}{n}$ w zadaniu rozgrzewkowym można poprawić do $\sin\frac{\pi}{2n}$?

Lemat.

Rozważmy n pasów wyznaczonych przez pary $(u_i, m_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, i niech $v \in \mathbb{R}^d$ będzie dowolnym wektorem.
Wówczas dla pewnego wyboru znaków $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ wektor $v + \sum \varepsilon_i u_i$ należy do strony ε_i i-tego pasa, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Niech C będzie wypukłe o szerokości 2.
Pozostaje udowodnić, że jeśli $\sum \|u_i\| \leq 1$, to zbiór $\bigcap_{\varepsilon} (C - \sum \varepsilon_i u_i)$ jest niepusty.

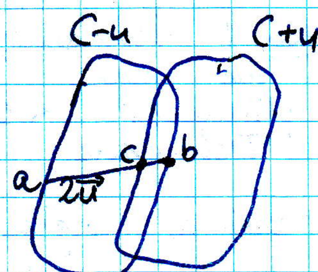
Oznaczmy $C_k = \bigcap_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)} \left(C - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i u_i\right)$.

Wtedy $C_{k+1} = (C_k - u_{k+1}) \cap (C_k + u_{k+1})$.

Wystarczy więc taki lemat:
Niech C będzie zbiorem wypukłym zwartym o szerokości w, $u \in \mathbb{R}^d$.
Wówczas szerokość zbioru $(C-u) \cap (C+u)$ jest $\geq w - 2\|u\|$.

Podlemat

Niech C będzie zwartym zbiorem wypukłym o szerokości w i niech $u \in \mathbb{R}^d$, $\|u\| = w$.
Wówczas dla pewnego $a \in \mathbb{R}^d$ $a \in C$ i $a + u \in C$.



Dowód Lematu z Podlematu:

Weźmy a z Podlematu na brzegu $C-u$, przedłużmy do przecięcia z brzegiem w b.

$\|a-b\| \geq w$, czyli $\frac{\|b-c\|}{\|a-b\|} \geq \frac{w-2\|u\|}{w}$

Ale jednokładność o środku b i skali $\frac{\|b-c\|}{\|a-b\|}$ przekształca $C-u$ na ten sam zbiór, co jednokładność o śr. c i tej samej skali zbiór $C+u$.

Zatem ten zbiór $\subset (C-u) \cap (C+u)$, co kończy dowód.