Explosion instable de type II pour l'équation des ondes énergie-critique

Jacek Jendrej
École Polytechnique, CMLS

Séminaire des doctorantes et des doctorants CMAP/CMLS
Vendredi, 20 novembre 2015

Plan de l'exposé

Équation des ondes énergie-critique

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(t,x) = \Delta_x u(t,x) + |u(t,x)|^{\frac{4}{N-2}} u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ (u(t_0,x), \partial_t u(t_0,x)) = (u_0(x), \dot u_0(x)) \in \dot H^1 \times L^2. \end{cases}$$

Notation : $f(u) := |u|^{\frac{4}{N-2}} u$, $F(u) := \int_0^u f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{N-2}{2N}|u|^{\frac{2N}{N-2}}$,
$\boldsymbol{u}_0 := (u_0, \dot u_0)$, $\mathcal{E} := \dot H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Fonctionnelle de l'énergie associée au problème :

$$E(\boldsymbol{u}_0) = \int \frac{1}{2}|\dot u_0|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 - F(u_0)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $J := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$ (structure symplectique de $\mathcal{E}$). On peut réécrire l'équation de manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u}(t) = J \circ \mathrm{D}E(\boldsymbol{u}(t)), \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0 \in \mathcal{E}. \end{cases} \tag{NLW}$$

Commentaires

- (Caractère bien posé dans $\mathcal{E}$) [Ginibre-Soffer-Velo, Shatah-Struwe '90]

$$\forall \boldsymbol{u}_0 \in \mathcal{E},\ \exists! \boldsymbol{u} \in C((T_-, T_+); \mathcal{E}), \qquad T_- < t_0 < T_+.$$

  (système dynamique dans l'espace $\mathcal{E}$; réversible ; énergie conservée).
- (Changement d'échelle) Soit $\lambda > 0$. Pour $\boldsymbol{v} = (v, \dot{v}) \in \mathcal{E}$ on note

$$\boldsymbol{v}_\lambda(x) := \left(\lambda^{-\frac{N-2}{2}} v\left(\frac{x}{\lambda}\right), \lambda^{-\frac{N}{2}} \dot{v}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

  On a $\|\boldsymbol{v}_\lambda\|_\mathcal{E} = \|\boldsymbol{v}\|_\mathcal{E}$ et $E(\boldsymbol{v}_\lambda) = E(\boldsymbol{v})$. De plus, si $\boldsymbol{u}(t)$ est solution de (NLW), alors $\boldsymbol{w}(t) := \boldsymbol{u}(\frac{t-t_0}{\lambda})_\lambda$ aussi (caractère énergie-critique).
- (Explosion) Il est possible que $\lim_{t \to T_+} \|\boldsymbol{u}(t)\|_\mathcal{E} = +\infty$ (explosion de type I). Il se peut aussi que $\boldsymbol{u}(t)$ quitte en temps fini tout compact de $\mathcal{E}$, $\|\boldsymbol{u}(t)\|_\mathcal{E}$ restant bornée (explosion de type II ou géométrique).
- Par la suite on se restreint aux solutions radiales (à symétrie sphérique).

État fondamental W

$$W(x) := \Big(1 + \frac{|x|^2}{N(N-2)}\Big)^{-\frac{N-2}{2}}, \qquad \boldsymbol{W} := (W, 0) \in \mathcal{E}.$$

- La fonction W achève la constante optimale dans l'inégalité de Sobolev critique,
- Col de montage pour l'énergie potentielle $E_0(u_0) := \int \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 - F(u_0)\,\mathrm{d}x$,
- L'ensemble des états stationnaires radiaux $\mathcal{S} := \{\boldsymbol{W}_\lambda\}$,
- $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble non-compact de $\mathcal{E}$,
- Tous les éléments de $\mathcal{S}$ ont la même énergie,
- Les solutions dans la cuvette ont le comportement asymptotiquement linéaire (difficile !),
- On s'intéresse aux solutions de (NLW) qui restent proche de $\mathcal{S}$.

Profil de l'explosion et profil asymptotique

Théorème

Soit $\boldsymbol{u}(t)$ une solution radiale de (NLW) qui explose en $t = T_+ < +\infty$ et telle que

$$\forall t, \quad \inf_{\lambda > 0} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{W}_\lambda\|_{\mathcal{E}} \leq \eta$$

(où $\eta > 0$ est une petite constante universelle). Alors il existe $\boldsymbol{u}_0^* \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in C([t_0, T_+), (0, +\infty))$ tels que

$$\lim_{t \to T_+} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{W}_{\lambda(t)} - \boldsymbol{u}_0^*\|_{\mathcal{E}} = 0, \qquad \lim_{t \to T_+} (T_+ - t)^{-1} \lambda(t) = 0.$$

[Duyckaerts, Kenig et Merle], [Côte, Kenig, Lawrie, Schlag]

- Des exemples de telles solutions ont été construits auparavant par [Krieger, Schlag et Tataru, Inventiones'08, Duke'09].
- Le théorème donne une forme de *stabilité asymptotique orbitale*.
- On dit que $\boldsymbol{W}$ est le *profil (universel) de l'explosion*. On appelle $\boldsymbol{u}_0^*$ le *profil asymptotique*.

Explosion de type II – existence

Théorème 1 (J. '15)

Soit $N = 5$. Soit $\boldsymbol{u}_0^* = (u_0^*, \dot{u}_0^*)$ régulier et $u_0^*(0) > 0$. Alors il existe une solution $\boldsymbol{u}(t)$ de (NLW) et une fonction continue $\lambda(t) \sim t^4$ telles que

$$\lim_{t \to 0^+} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{W}_{\lambda(t)} - \boldsymbol{u}_0^*\|_{\mathcal{E}} = 0. \tag{1}$$

- Si on prend $u_0^*(x) := \text{"}|x|^{\frac{\nu-3}{2}}\text{"}$ et $\dot{u}_0^*(x) := 0$, la même méthode donne une solution $\boldsymbol{u}(t)$ vérifiant (1) avec $\lambda(t) \sim t^{\nu+1}$,
- On n'obtient aucune information concernant la régularité de $\boldsymbol{u}(t)$ autre que $\boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{E}$. En réalité on s'attend à ce que les solutions C^∞ admettent seulement une suite discrète de vitesses d'explosion possibles (c'est ce qu'on appelle *explosion stable*).

Explosion de type II – propriétés

Théorème 2 (J. '15)

Soit $N = 5$. Soit $\boldsymbol{u}(t)$ une solution de (NLW) et $\lambda(t)$ une fonction continue vérifiant

$$\lim_{t \to 0^+} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{W}_{\lambda(t)} - \boldsymbol{u}_0^*\|_{\mathcal{E}} = 0. \tag{2}$$

Supposons en plus que $\boldsymbol{u}_0^*$ est régulier. Alors

- $u_0^*(0) \geq 0$,
- $\lambda(t) \lesssim t^4$.

- On peut montrer (et c'est bien connu) que $0 \in \mathrm{supp}(\boldsymbol{u}_0^*)$,
- Il serait intéressant d'enlever l'hypothèse de régularité du profil asymptotique (on obtiendrait d'autres vitesses de concentration – plus proches du taux auto-similaire).

Merci de votre attention.