REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES TD1

Exercice 1

Soit A un anneau non nécessairement commutatif.

(0) Supposons que A possède exactement deux idéaux bilatères maximaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ tels que $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = 0$. Montrer que A est isomorphe au produit cartésien de deux anneaux simples (c'est-à-dire sans idéaux bilatères autres que 0 et eux-mêmes).

(1) Soit $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$, soient

$$\mathfrak{m}_1 = \mathrm{Ker}\big[\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})\big] \quad \text{et } \mathfrak{m}_2 = \mathrm{Ker}\big[\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\big].$$

Appliquer ce qui précède à l'anneau A.

(2) Même question que (1) si A possède trois idéaux maximaux bilatères avec $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 = 0$ (dans ce cas, A est produit de trois anneaux simples).

Exercice 2

Soit k un corps commutatif. On considère la k-algèbre $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(k)$.

(0) Pour quelles valeurs de n cette algèbre est-elle commutative?

(1) On considère la base canonique $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, formée des matrices de transvection. Montrer, pour tous $1 \leq i, j, k, l \leq n$, l'identité suivante:

$$\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k} \cdot \mathrm{E}_{i,\ell},$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker.

(2) Donner des exemples d'idéaux à gauche, resp. à droite, non-triviaux de $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(k)$. Donner des idéaux à gauche minimaux, puis maximaux.

(3) Décrire le A-module à gauche $\mathrm{M}_{n,1}(k)$ des vecteurs colonnes comme un quotient A/I pour $\mathrm{I} \subset \mathrm{A}$ un sous-module adéquat.

(4) Montrer que tout idéal à gauche de $\mathrm{M}_n(k)$ est principal. Décrire complètement les idéaux à gauche de $\mathrm{M}_n(k)$ (on commencera par les idéaux à gauche minimaux). Idem pour les idéaux à droite.

[Indication : pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(k)$, il existe $r \leq n$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{I}_r \cdot \mathrm{Q}$ $(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(k))$, où $\mathrm{I}_r = \mathrm{E}_{1,1} + \ldots + \mathrm{E}_{r,r}$]

(5) Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(k)$ est simple.

(6) Ecrire le A-module à gauche A comme une somme directe de A-modules à gauche simples $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n$, tous isomorphes à $\mathrm{M}_{n,1}(k)$.

Date: 3 Février 2025.

Exercice 3

Soit A un anneau non commutatif.

(0) Montrer que l'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})$ des endomorphismes du A-module à gauche A, est isomorphe à l'anneau opposé de A.

Soit maintenant k un corps commutatif.

(1) Montrer que l'algèbre $\mathrm{M}_n(k)$ est isomorphe à son opposée.

(2) Même question pour la $\mathbf{R}$-algèbre du corps des quaternions de Hamilton.

(3) Donner un exemple d'algèbre non-isomorphe à son opposée.