REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES TD2

Exercice 1

Soit K un corps commutatif. Soient V_1 et V_2 deux K-espaces vectoriels de dimension finie. On pose $n_i := \dim_K(V_i)$ pour $i = 1, 2$.

(1) Pour $i = 1, 2$, soit $f_i \in \mathrm{End}_K(V_i)$. Rappeler la construction de l'endomorphisme $f_1 \otimes f_2$ de $V_1 \otimes_K V_2$.

(2) Montrer que l'application bilinéaire

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_K(V_1) \times \mathrm{End}_K(V_2) &\longrightarrow \mathrm{End}_K(V_1 \otimes V_2),\\ (f_1, f_2) &\longmapsto f_1 \otimes f_2\end{aligned}$$

induit un ismomorphisme de K-espaces vectoriels (et même de K-algèbres):

$$(\star) \quad \mathrm{End}_K(V_1) \otimes \mathrm{End}_K(V_2) \simeq \mathrm{End}_K(V_1 \otimes V_2).$$

(3) On définit le *produit kroneckérien (Kronecker product)*

$$M = M_1 \otimes M_2 \in M_{n_1,n_2}(K)$$

de deux matrices $M_1 = (m^{(1)}_{i,j}) \in M_{n_1}(K)$ et $M_2 = (m^{(2)}_{k,\ell}) \in M_{n_2}(K)$ par la formule

$$m_{(i,k),(j,\ell)} = m^{(1)}_{i,j} \cdot m^{(2)}_{k,\ell}$$

pour $(i, k) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, n_2]\!]$ et $(j, \ell) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, n_2]\!]$.

(a) Montrer que l'application bilinéaire donnée par $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \otimes M_2$ définit un isomorphisme de K-algèbres

$$(\star\star) \quad M_{n_1}(K) \otimes_K M_{n_2}(K) \simeq M_{n_1,n_2}(K)$$

(on pourra éventuellement utiliser les bases canoniques respectives de $M_{n_1}(K)$, $M_{n_2}(K)$ et $M_{n_1,n_2}(K)$).

(b) On fixe des bases respectives $\mathscr{B}_i$ de V_i pour $i = 1, 2$ et on forme les matrices $A_i = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}_i}(f_i)$. On note $A_1 \otimes A_2 \in M_{n_1,n_2}(K)$ la matrice de $f_1 \otimes f_2$ dans la base $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$ de $V_1 \otimes_K V_2$. Montrer que les isomorphismes $(\star)$ et $(\star\star)$ sont compatibles dès lors qu'on fixe les bases $\mathscr{B}_i$ (et donc $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$).

(c) Calculer $D_1 \otimes D_2$ lorsque $D_1 \in M_{n_1}(K)$ et $D_2 \in M_{n_2}(K)$ sont diagonales.

(4) Démontrer que $\mathrm{Tr}(A_1 \otimes A_2) = \mathrm{Tr}(A_1) \cdot \mathrm{Tr}(A_2)$ (on pourra d'abord supposer que $K = \mathbf{C}$, puis le déduire pour tous corps K par le principe de prolongement des identités algébriques de Lefschetz, cf. le cours).

Date: 3 Février 2025.

(5) Démontrer que $\det(A_1 \otimes A_2) = (\det A_1)^{n_2} \cdot (\det A_2)^{n_1}$. Idem, on pourra d'abord supposer $K = \mathbf{C}$ puis appliquer le principe de Lefschetz.

Exercice 2

Soit $V = M_{n,1}(K)$, resp. $V^\vee = M_{1,n}(K)$, le K-espace vectoriel des vecteurs colonnes, resp. lignes. Soit $G = GL_n(K)$. Ce groupe agit à gauche sur V par multiplication matricielle $(g, X) \mapsto g \cdot X \in V$. Il agit aussi à gauche sur $V^\vee$ par $(g, Y) \mapsto Y \cdot g^{-1} \in V^\vee$.

On munit $V \otimes_K V^\vee$ d'une structure de G-module à gauche par la formule:

$$g \cdot (X \otimes Y) := (g \cdot X) \otimes (Y \cdot g^{-1}) \in V \otimes_K V^\vee.$$

On munit par ailleurs $M_n(K)$ d'une structure de G-module à gauche par conjugaison, i.e. pour tout $N \in M_n(K)$, $g \star N := g \cdot N \cdot g^{-1} \in M_n(K)$.

(1) Montrer que l'isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\Phi : V \otimes_K V^\vee = M_{n,1}(K) \otimes_K M_{1,n}(K) \xrightarrow{\sim} M_n(K)$$

induit par $(X, Y) \mapsto X \cdot Y$ est G-linéaire (pour les actions définies plus haut).

(2) Fixons $n = 2$ et $K = \mathbf{R}$. On identifie les $\mathbf{R}$-espaces vectoriels $M_2(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}^4$ via l'isomorphisme suivant:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto (x, y, z, t).$$

Montrer que l'image par Φ de l'ensemble des tenseurs purs dans $M_{2,1}(\mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{R}} M_{1,2}(\mathbf{R})$ est précisément l'ensemble:

$$\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; xt - yz = 0 \right\}.$$

(3) Montrer que la fonction $Q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, définie par $(x, y, z, t) \mapsto xt - yz$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(2, 2)$. L'ensemble de ses zéros s'appelle une *quadrique*, et plus particulièrement ici, un *hyperboloïde*. L'ensemble des vecteurs purs forme donc une 3-quadrique réglée de $\mathbf{R}^4$; ce n'est cependant pas un sous-espace vectoriel. Quel est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel qu'il engendre?