Algorithmes pour l'arithmétique II
Cours 7

Julien Lavauzelle

Université Paris 8

Master 2 ACC et CSSD – Algorithmes pour l'arithmétique

10/11/2020

Questions ?

Motivation

La semaine dernière on a vu des méthodes **spéciales** pour factoriser des entiers N :

1. divisions successives, algorithme ρ de Pollard pour trouver de petits facteurs de N
2. algorithme de Fermat pour trouver des facteurs très proches de $\sqrt{N}$
3. méthode $p-1$ de Pollard pour trouver des facteurs p tels que $p-1$ est superfriable

On a rapidement présenté la méthode ECM de Lenstra, qui utilise le groupe des points de courbes elliptiques aléatoires pour factoriser en **temps sous-exponentiel**

$$O\Big(\exp(\sqrt{2\log p \log\log p})\Big)$$

où p est le plus petit facteur de N.

Motivation

La semaine dernière on a vu des méthodes **spéciales** pour factoriser des entiers N :

1. divisions successives, algorithme ρ de Pollard pour trouver de petits facteurs de N
2. algorithme de Fermat pour trouver des facteurs très proches de $\sqrt{N}$
3. méthode $p-1$ de Pollard pour trouver des facteurs p tels que $p-1$ est superfriable

On a rapidement présenté la méthode ECM de Lenstra, qui utilise le groupe des points de courbes elliptiques aléatoires pour factoriser en **temps sous-exponentiel**

$$O\Big(\exp(\sqrt{2\log p \log\log p})\Big)$$

où p est le plus petit facteur de N.

Dans cette séance, on va voir l'algorithme de **crible quadratique** qui permet de factoriser n'importe quel entier N en temps

$$O\Big(\exp(\sqrt{\log N \log\log N})\Big)$$

Motivation

La semaine dernière on a vu des méthodes **spéciales** pour factoriser des entiers N :

1. divisions successives, algorithme ρ de Pollard pour trouver de petits facteurs de N
2. algorithme de Fermat pour trouver des facteurs très proches de $\sqrt{N}$
3. méthode $p-1$ de Pollard pour trouver des facteurs p tels que $p-1$ est superfriable

On a rapidement présenté la méthode ECM de Lenstra, qui utilise le groupe des points de courbes elliptiques aléatoires pour factoriser en **temps sous-exponentiel**

$$O\Big(\exp(\sqrt{2\log p \log\log p})\Big)$$

où p est le plus petit facteur de N.

Dans cette séance, on va voir l'algorithme de **crible quadratique** qui permet de factoriser n'importe quel entier N en temps

$$O\Big(\exp(\sqrt{\log N \log\log N})\Big)$$

Son extension, l'algorithme de **crible algébrique** (ou crible par corps de nombres généralisé) (*general number field sieve*, NFS) atteint une complexité encore meilleure :

$$O\Big(\exp((\tfrac{64}{9}\log N)^{1/3}(\log\log N)^{2/3})\Big)\,.$$

Complexité

Objectif : représenter des grandeurs sous-exponentielles $n^\alpha \ll f(n) \ll 2^{\beta n}$.

Complexité

Objectif : représenter des grandeurs sous-exponentielles $n^\alpha \ll f(n) \ll 2^{\beta n}$.

Définition. Notation L :

$$L_n[a,b] := \exp\left(b\, n^a\, (\log n)^{1-a}\right).$$

On prendra souvent exp et log en base 2.

Objectif : représenter des grandeurs sous-exponentielles $n^\alpha \ll f(n) \ll 2^{\beta n}$.

Définition. Notation L :

$$L_n[a,b] := \exp\left(b\, n^a\, (\log n)^{1-a}\right).$$

On prendra souvent exp et log en base 2.

Exemples :

- Les fonctions exponentielles $2^{\beta n}$ sont des $L_n[1,\beta]$.
- Les fonctions polynomiales n^α sont des $L_n[0,\alpha]$.

Complexité

Objectif : représenter des grandeurs sous-exponentielles $n^\alpha \ll f(n) \ll 2^{\beta n}$.

Définition. Notation L :
$$L_n[a,b] := \exp\left(b\, n^a\, (\log n)^{1-a}\right).$$
On prendra souvent exp et log en base 2.

Exemples :

- Les fonctions exponentielles $2^{\beta n}$ sont des $L_n[1,\beta]$.
- Les fonctions polynomiales n^α sont des $L_n[0,\alpha]$.

On va utiliser cette notation pour les algorithmes de factorisation. On s'intéresse donc à leur complexité en fonction de $\log_2 N$ ou de $\log_2 p$. Ainsi :

- La complexité de la méthode ρ est en $O(\sqrt{p})$

Objectif : représenter des grandeurs sous-exponentielles $n^\alpha \ll f(n) \ll 2^{\beta n}$.

Définition. Notation L :

$$L_n[a,b] := \exp\left(b\, n^a\, (\log n)^{1-a}\right).$$

On prendra souvent exp et log en base 2.

Exemples :

- Les fonctions exponentielles $2^{\beta n}$ sont des $L_n[1,\beta]$.
- Les fonctions polynomiales n^α sont des $L_n[0,\alpha]$.

On va utiliser cette notation pour les algorithmes de factorisation. On s'intéresse donc à leur complexité en fonction de $\log_2 N$ ou de $\log_2 p$. Ainsi :

- La complexité de la méthode ρ est en $O(\sqrt{p}) = O(L_{\log p}[1, \frac{1}{2}])$.

Objectif : représenter des grandeurs sous-exponentielles $n^\alpha \ll f(n) \ll 2^{\beta n}$.

Définition. Notation L :

$$L_n[a,b] := \exp\left(b\, n^a\, (\log n)^{1-a}\right).$$

On prendra souvent exp et log en base 2.

Exemples :

- Les fonctions exponentielles $2^{\beta n}$ sont des $L_n[1,\beta]$.
- Les fonctions polynomiales n^α sont des $L_n[0,\alpha]$.

On va utiliser cette notation pour les algorithmes de factorisation. On s'intéresse donc à leur complexité en fonction de $\log_2 N$ ou de $\log_2 p$. Ainsi :

- La complexité de la méthode ρ est en $O(\sqrt{p}) = O(L_{\log p}[1, \frac{1}{2}])$.
- La complexité de ECM est en $O(\exp(\sqrt{2 \log p \log\log p}))$

Complexité

Objectif : représenter des grandeurs sous-exponentielles $n^\alpha \ll f(n) \ll 2^{\beta n}$.

Définition. Notation L :

$$L_n[a,b] := \exp\left(b\, n^a\, (\log n)^{1-a}\right).$$

On prendra souvent exp et log en base 2.

Exemples :

- Les fonctions exponentielles $2^{\beta n}$ sont des $L_n[1,\beta]$.
- Les fonctions polynomiales n^α sont des $L_n[0,\alpha]$.

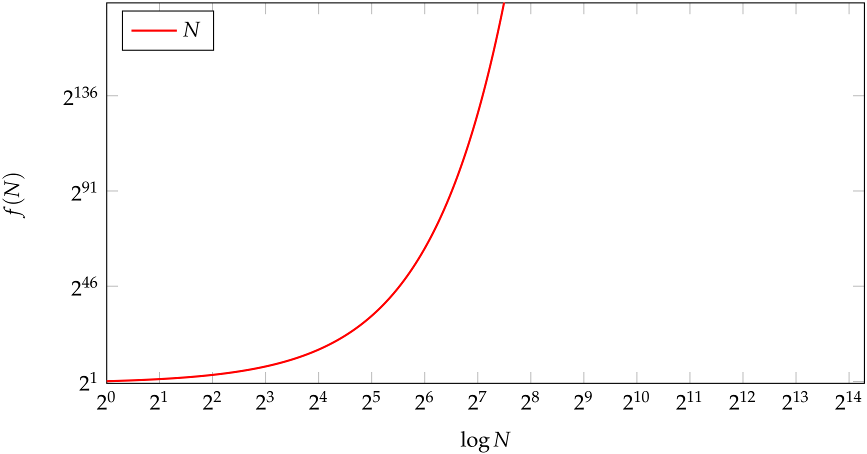
On va utiliser cette notation pour les algorithmes de factorisation. On s'intéresse donc à leur complexité en fonction de $\log_2 N$ ou de $\log_2 p$. Ainsi :

- La complexité de la méthode ρ est en $O(\sqrt{p}) = O(L_{\log p}[1, \frac{1}{2}])$.
- La complexité de ECM est en $O(\exp(\sqrt{2 \log p \log\log p})) = O(L_{\log p}[\frac{1}{2}, \sqrt{2}])$.

Quelques **exemples** de comportement de fonctions (échelle « log log »).

Rappel :

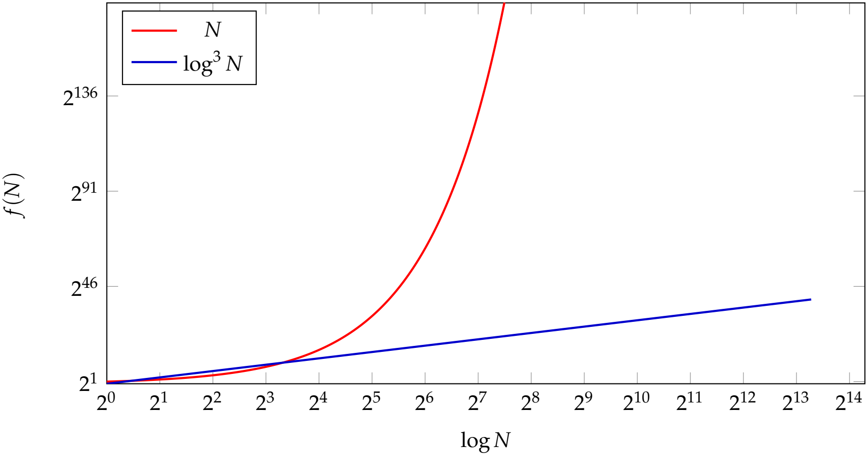
- 2^{80} : très, très difficile à calculer, pour $\simeq 2^{30}$ op./s sur un processeur
- 2^{128} : supposé inatteignable



Quelques **exemples** de comportement de fonctions (échelle « log log »).

Rappel :

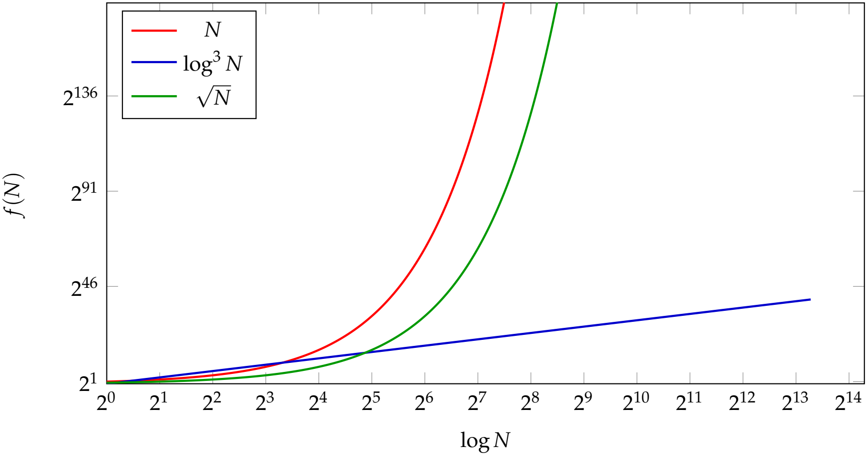
- 2^{80} : très, très difficile à calculer, pour $\simeq 2^{30}$ op./s sur un processeur
- 2^{128} : supposé inatteignable



Quelques **exemples** de comportement de fonctions (échelle « log log »).

Rappel :

- 2^{80} : très, très difficile à calculer, pour $\simeq 2^{30}$ op./s sur un processeur
- 2^{128} : supposé inatteignable

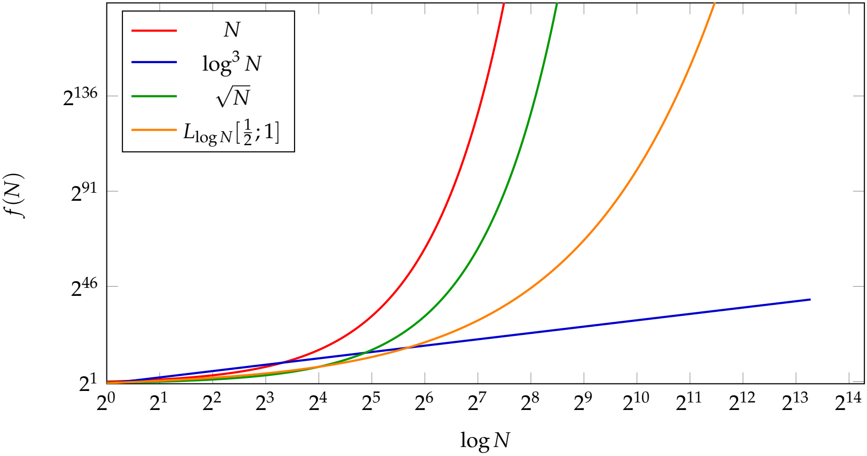


Complexité

Quelques **exemples** de comportement de fonctions (échelle « log log »).

Rappel :

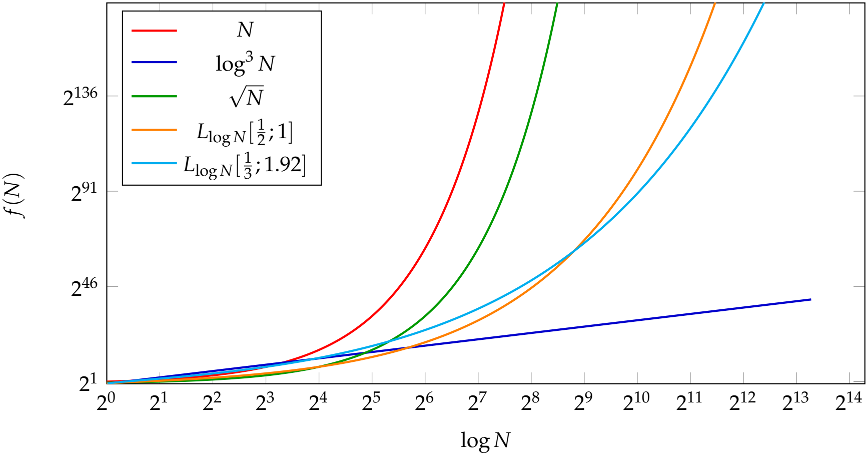
- 2^{80} : très, très difficile à calculer, pour $\simeq 2^{30}$ op./s sur un processeur
- 2^{128} : supposé inatteignable



Quelques **exemples** de comportement de fonctions (échelle « log log »).

Rappel :

- 2^{80} : très, très difficile à calculer, pour $\simeq 2^{30}$ op./s sur un processeur
- 2^{128} : supposé inatteignable



Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a - b)(a + b)$ donne une factorisation de N.

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

> **Idée :** Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Idée : Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \bmod 91$.

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Idée : Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \bmod 91$. Puis, $\mathrm{pgcd}(4+17, N) = 7$.

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Idée : Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \bmod 91$. Puis, $\mathrm{pgcd}(4+17, N) = 7$. Ici, on a également $\mathrm{pgcd}(17-4, N) = 13$.

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Idée : Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \bmod 91$. Puis, $\mathrm{pgcd}(4+17, N) = 7$. Ici, on a également $\mathrm{pgcd}(17-4, N) = 13$.

Remarque. On obtient un facteur propre lorsque les a et b trouvés vérifient $a \not\equiv \pm b \bmod N$.

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

> **Idée :** Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \bmod 91$. Puis, $\mathrm{pgcd}(4+17, N) = 7$. Ici, on a également $\mathrm{pgcd}(17-4, N) = 13$.

Remarque. On obtient un facteur propre lorsque les a et b trouvés vérifient $a \not\equiv \pm b \bmod N$.

Est-ce fréquent ?

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Idée : Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \bmod 91$. Puis, $\mathrm{pgcd}(4+17, N) = 7$. Ici, on a également $\mathrm{pgcd}(17-4, N) = 13$.

Remarque. On obtient un facteur propre lorsque les a et b trouvés vérifient $a \not\equiv \pm b \mod N$.

Est-ce fréquent ?

Lemme. Si N admet t diviseurs premiers distincts, alors l'équation $x^2 = 1$ admet 2^t solutions modulo N.

Crible quadratique : origines

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Idée : Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \mod 91$. Puis, $\mathrm{pgcd}(4+17, N) = 7$. Ici, on a également $\mathrm{pgcd}(17-4, N) = 13$.

Remarque. On obtient un facteur propre lorsque les a et b trouvés vérifient $a \not\equiv \pm b \mod N$.

Est-ce fréquent ?

Lemme. Si N admet t diviseurs premiers distincts, alors l'équation $x^2 = 1$ admet 2^t solutions modulo N.

Conséquence. Si N est composé ($t \geq 2$) et si $a^2 \equiv b^2 \mod N$ ont été trouvés « aléatoirement », alors il y a plus d'une chance sur deux pour que $a \not\equiv \pm b \mod N$.

Méthode de Fermat : si on arrive à écrire $N = a^2 - b^2$, alors $N = (a-b)(a+b)$ donne une factorisation de N.

Raffinement de l'idée (Kraitchik, puis Dixon) :

Idée : Si on obtient « seulement » $N \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, alors on peut espérer que $\mathrm{pgcd}(a-b, N)$ ou $\mathrm{pgcd}(a+b, N)$ donne un facteur propre de N.

Exemple. $N = 91$. On a $4^2 = 16$ et $17^2 = 289 \equiv 16 \mod 91$. Puis, $\mathrm{pgcd}(4+17, N) = 7$. Ici, on a également $\mathrm{pgcd}(17-4, N) = 13$.

Remarque. On obtient un facteur propre lorsque les a et b trouvés vérifient $a \not\equiv \pm b \mod N$.

Est-ce fréquent ?

Lemme. Si N admet t diviseurs premiers distincts, alors l'équation $x^2 = 1$ admet 2^t solutions modulo N.

Conséquence. Si N est composé ($t \geq 2$) et si $a^2 \equiv b^2 \mod N$ ont été trouvés « aléatoirement », alors il y a plus d'une chance sur deux pour que $a \not\equiv \pm b \mod N$.

Question. Comment trouver a, b tels que $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil\sqrt{N}\rceil)^2 - N$$

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \cdots (x_k + \lceil \sqrt{N} \rceil)$.

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \cdots (x_k + \lceil \sqrt{N} \rceil)$.

Exemple : $N = 1649$ donne $\lceil \sqrt{N} \rceil = 41$.

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil\sqrt{N}\rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil\sqrt{N}\rceil) \cdots (x_k + \lceil\sqrt{N}\rceil)$.

Exemple : $N = 1649$ donne $\lceil\sqrt{N}\rceil = 41$. On choisit la borne $B = 6$. Puis, modulo N, on obtient

$$\begin{cases} (x=0) & 41^2 = 1681 & \equiv 32 & \equiv 2^5 & \mod N & \text{(ok)} \\ (x=1) & 42^2 = 1764 & \equiv 115 & \equiv 5 \times 23 & \mod N & \\ (x=2) & 43^2 = 1849 & \equiv 200 & \equiv 2^3 \times 5^2 & \mod N & \text{(ok)} \end{cases}$$

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \cdots (x_k + \lceil \sqrt{N} \rceil)$.

Exemple : $N = 1649$ donne $\lceil \sqrt{N} \rceil = 41$. On choisit la borne $B = 6$. Puis, modulo N, on obtient

$$\begin{cases} (x=0) & 41^2 = 1681 & \equiv 32 & \equiv 2^5 & \mod N & \text{(ok)} \\ (x=1) & 42^2 = 1764 & \equiv 115 & \equiv 5 \times 23 & \mod N & \\ (x=2) & 43^2 = 1849 & \equiv 200 & \equiv 2^3 \times 5^2 & \mod N & \text{(ok)} \end{cases}$$

Ainsi, on note que
$$41^2 \times 43^2 \equiv 2^8 \times 5^2 \equiv (2^4 \times 5)^2 \mod N\,.$$

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \cdots (x_k + \lceil \sqrt{N} \rceil)$.

Exemple : $N = 1649$ donne $\lceil \sqrt{N} \rceil = 41$. On choisit la borne $B = 6$. Puis, modulo N, on obtient

$$\begin{cases} (x=0) & 41^2 = 1681 & \equiv 32 & \equiv 2^5 & \mod N & \text{(ok)} \\ (x=1) & 42^2 = 1764 & \equiv 115 & \equiv 5 \times 23 & \mod N & \\ (x=2) & 43^2 = 1849 & \equiv 200 & \equiv 2^3 \times 5^2 & \mod N & \text{(ok)} \end{cases}$$

Ainsi, on note que
$$41^2 \times 43^2 \equiv 2^8 \times 5^2 \equiv (2^4 \times 5)^2 \mod N\,.$$

Il résulte que $1763^2 \equiv 80^2 \mod N$, on a bien $114 \equiv 1763 \not\equiv \pm 80 \mod N$. Puis, on obtient $\mathrm{pgcd}(114 - 80, 1649) = 17$ un facteur propre de $N = 1469$.

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \cdots (x_k + \lceil \sqrt{N} \rceil)$.

Exemple : $N = 1649$ donne $\lceil \sqrt{N} \rceil = 41$. On choisit la borne $B = 6$. Puis, modulo N, on obtient

$$\begin{cases} (x=0) & 41^2 = 1681 & \equiv 32 & \equiv 2^5 & \mod N & \text{(ok)} \\ (x=1) & 42^2 = 1764 & \equiv 115 & \equiv 5 \times 23 & \mod N & \\ (x=2) & 43^2 = 1849 & \equiv 200 & \equiv 2^3 \times 5^2 & \mod N & \text{(ok)} \end{cases}$$

Ainsi, on note que
$$41^2 \times 43^2 \equiv 2^8 \times 5^2 \equiv (2^4 \times 5)^2 \mod N\,.$$

Il résulte que $1763^2 \equiv 80^2 \mod N$, on a bien $114 \equiv 1763 \not\equiv \pm 80 \mod N$. Puis, on obtient $\mathrm{pgcd}(114 - 80, 1649) = 17$ un facteur propre de $N = 1469$.

Remarque. Avec l'algorithme de Fermat, on aurait dû aller jusqu'à 57^2 pour factoriser.

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \cdots (x_k + \lceil \sqrt{N} \rceil)$.

Trois questions :

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \cdots (x_k + \lceil \sqrt{N} \rceil)$.

Trois questions :

1. quelle base de facteurs premiers $\mathcal{P}$ choisir ?

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil\sqrt{N}\rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil\sqrt{N}\rceil) \cdots (x_k + \lceil\sqrt{N}\rceil)$.

Trois questions :

1. quelle base de facteurs premiers $\mathcal{P}$ choisir ?
2. comment obtient-on ces éléments B-friables de la forme $Q(x)$?
   $\rightarrow$ technique de crible (ici, quadratique)

Comment trouver $a^2 \equiv b^2 \mod N$?

Idée. Étant donnée une borne de lissité $B \geq 2$:

1. on crée une base de facteurs premiers $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, tous inférieurs à B
2. on collecte une quantité importante d'éléments qui se décomposent sur $\mathcal{P}$, et de la forme
$$Q(x) := (x + \lceil\sqrt{N}\rceil)^2 - N$$
3. on essaie de combiner certains $Q(x_i)$ pour que
$$Q(x_1) \cdots Q(x_k) \equiv b^2 \mod N$$

Alors, on aura obtenu $a^2 \equiv b^2 \mod N$ où $a := (x_1 + \lceil\sqrt{N}\rceil) \cdots (x_k + \lceil\sqrt{N}\rceil)$.

Trois questions :

1. quelle base de facteurs premiers $\mathcal{P}$ choisir ?
2. comment obtient-on ces éléments B-friables de la forme $Q(x)$?
   $\rightarrow$ technique de crible (ici, quadratique)
3. comment savoir quels $Q(x_i)$ multiplier pour obtenir un carré modulo N ?
   $\rightarrow$ algèbre linéaire dans $\mathbb{F}_2$

Étape I : base de facteurs

Première étape : construction de la **base de facteurs**.

Étape I : base de facteurs

Première étape : construction de la **base de facteurs**.

Si $x < \sqrt{N}/3$, alors on a

$$Q(x) = (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N \simeq x^2 + 2\sqrt{N}x < N.$$

Étape I : base de facteurs

Première étape : construction de la **base de facteurs**.

Si $x < \sqrt{N}/3$, alors on a

$$Q(x) = (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N \simeq x^2 + 2\sqrt{N}x < N.$$

Donc $(Q(x) \bmod N)$ vaut $Q(x)$, et pour tout premier $p \geq 2$, on a

$$p \mid Q(x) \implies N \text{ est un carré modulo } p$$

Étape I : base de facteurs

Première étape : construction de la **base de facteurs**.

Si $x < \sqrt{N}/3$, alors on a

$$Q(x) = (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N \simeq x^2 + 2\sqrt{N}x < N.$$

Donc $(Q(x) \mod N)$ vaut $Q(x)$, et pour tout premier $p \geq 2$, on a

$$p \mid Q(x) \implies N \text{ est un carré modulo } p$$

Pour constituer la base de facteurs, on peut donc considérer **uniquement** les premiers p tel que $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ et $p \leq B$.

Première étape : construction de la **base de facteurs**.

Si $x < \sqrt{N}/3$, alors on a

$$Q(x) = (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N \simeq x^2 + 2\sqrt{N}x < N.$$

Donc $(Q(x) \bmod N)$ vaut $Q(x)$, et pour tout premier $p \geq 2$, on a

$$p \mid Q(x) \implies N \text{ est un carré modulo } p$$

Pour constituer la base de facteurs, on peut donc considérer **uniquement** les premiers p tel que $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ et $p \leq B$.

Exemple : $N = 369713 = 457 \times 809$. On choisit ici $B = 21$. On a alors

p	2	3	5	7	11	13	17	19
$\left(\frac{N}{p}\right)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

Étape I : base de facteurs

Première étape : construction de la **base de facteurs**.

Si $x < \sqrt{N}/3$, alors on a

$$Q(x) = (x + \lceil \sqrt{N} \rceil)^2 - N \simeq x^2 + 2\sqrt{N}x < N.$$

Donc $(Q(x) \bmod N)$ vaut $Q(x)$, et pour tout premier $p \geq 2$, on a

$$p \mid Q(x) \implies N \text{ est un carré modulo } p$$

Pour constituer la base de facteurs, on peut donc considérer **uniquement** les premiers p tel que $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ et $p \leq B$.

Exemple : $N = 369713 = 457 \times 809$. On choisit ici $B = 21$. On a alors

p	2	3	5	7	11	13	17	19
$\left(\frac{N}{p}\right)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

La base de facteurs est donc $\{2, 7, 11, 19\}$.

Étape III : algèbre linéaire

Troisième étape : l'**algèbre linéaire**.

Étape III : algèbre linéaire

Troisième étape : l'**algèbre linéaire**.

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\}$ la base de facteurs construite précédemment.

Troisième étape : l'**algèbre linéaire**.

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ la base de facteurs construite précédemment.

Supposons que l'on ait collecté t éléments $Q(x_1), \dots, Q(x_t)$ tels que les $Q(x_i) \bmod N$ se décomposent dans $\mathcal{P}$ (étape II).

Étape III : algèbre linéaire

Troisième étape : l'**algèbre linéaire**.

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\}$ la base de facteurs construite précédemment.

Supposons que l'on ait collecté t éléments $Q(x_1), \ldots, Q(x_t)$ tels que les $Q(x_i) \bmod N$ se décomposent dans $\mathcal{P}$ (étape II). On peut alors écrire $Q(x_i) \bmod N$ sous la forme

$$p_1^{e_1^{(i)}} \times p_2^{e_2^{(i)}} \times \cdots \times p_s^{e_s^{(i)}}$$

et on note $\boldsymbol{e}(x_i) = (e_1^{(i)}, \ldots, e_s^{(i)})$.

Troisième étape : l'**algèbre linéaire**.

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ la base de facteurs construite précédemment.

Supposons que l'on ait collecté t éléments $Q(x_1), \dots, Q(x_t)$ tels que les $Q(x_i) \bmod N$ se décomposent dans $\mathcal{P}$ (étape II). On peut alors écrire $Q(x_i) \bmod N$ sous la forme

$$p_1^{e_1^{(i)}} \times p_2^{e_2^{(i)}} \times \dots \times p_s^{e_s^{(i)}}$$

et on note $\boldsymbol{e}(x_i) = (e_1^{(i)}, \dots, e_s^{(i)})$.

Alors, on a $Q(x_{i_1})Q(x_{i_2}) \dots Q(x_{i_k}) \equiv p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s} \mod N$ où

$$(e_1, \dots, e_s) \;=\; \boldsymbol{e}(x_{i_1}) + \boldsymbol{e}(x_{i_2}) + \dots + \boldsymbol{e}(x_{i_k})\,.$$

Troisième étape : l'**algèbre linéaire**.

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ la base de facteurs construite précédemment.

Supposons que l'on ait collecté t éléments $Q(x_1), \dots, Q(x_t)$ tels que les $Q(x_i) \mod N$ se décomposent dans $\mathcal{P}$ (étape II). On peut alors écrire $Q(x_i) \mod N$ sous la forme

$$p_1^{e_1^{(i)}} \times p_2^{e_2^{(i)}} \times \cdots \times p_s^{e_s^{(i)}}$$

et on note $\boldsymbol{e}(x_i) = (e_1^{(i)}, \dots, e_s^{(i)})$.

Alors, on a $Q(x_{i_1})Q(x_{i_2}) \dots Q(x_{i_k}) \equiv p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s} \mod N$ où

$$(e_1, \dots, e_s) \ = \ \boldsymbol{e}(x_{i_1}) + \boldsymbol{e}(x_{i_2}) + \cdots + \boldsymbol{e}(x_{i_k})\,.$$

Lemme. L'élément $Q(x_1) \dots Q(x_k)$ est un carré modulo N si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}(x_i) = \mathbf{0} \mod 2\,.$$

Étape III : algèbre linéaire

Lemme. L'élément $Q(x_1)\dots Q(x_k)$ est un carré modulo N si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}(x_i) = \mathbf{0} \mod 2\,.$$

Étape III : algèbre linéaire

Lemme. L'élément $Q(x_1)\dots Q(x_k)$ est un carré modulo N si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}(x_i) = \mathbf{0} \mod 2\,.$$

On va alors construire une matrice $\boldsymbol{M}$ entière de taille $(t \times s)$ telle la i-ème ligne de $\boldsymbol{M}$ est le vecteur ligne $\boldsymbol{e}(x_i)$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \dots & e_s^{(1)} \\ e_1^{(2)} & \dots & \dots & e_s^{(2)} \\ \vdots & & & \\ & & & \\ e_1^{(t)} & \dots & \dots & e_s^{(t)} \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{t \times s}$$

Étape III : algèbre linéaire

Lemme. L'élément $Q(x_1)\dots Q(x_k)$ est un carré modulo N si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}(x_i) = \boldsymbol{0} \mod 2\,.$$

On va alors construire une matrice $\boldsymbol{M}$ entière de taille $(t \times s)$ telle la i-ème ligne de $\boldsymbol{M}$ est le vecteur ligne $\boldsymbol{e}(x_i)$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \dots & e_s^{(1)} \\ e_1^{(2)} & \dots & \dots & e_s^{(2)} \\ \vdots & & & \\ e_1^{(t)} & \dots & \dots & e_s^{(t)} \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{t\times s}$$

Pour obtenir un carré modulo N de la forme $Q(x_1)\dots Q(x_k)$, il suffit donc de chercher un élément du noyau à gauche de la matrice $(\boldsymbol{M} \mod 2)$, car

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_t) \in \mathbb{F}_2^t \text{ vérifie } \boldsymbol{uM} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_i \boldsymbol{e}(x_i) = \boldsymbol{0}\,.$$

Lemme. L'élément $Q(x_1)\dots Q(x_k)$ est un carré modulo N si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}(x_i) = \mathbf{0} \mod 2\,.$$

On va alors construire une matrice $\boldsymbol{M}$ entière de taille $(t \times s)$ telle la i-ème ligne de $\boldsymbol{M}$ est le vecteur ligne $\boldsymbol{e}(x_i)$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \dots & e_s^{(1)} \\ e_1^{(2)} & \dots & \dots & e_s^{(2)} \\ \vdots & & & \\ & & & \\ e_1^{(t)} & \dots & \dots & e_s^{(t)} \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{t\times s}$$

Pour obtenir un carré modulo N de la forme $Q(x_1)\dots Q(x_k)$, il suffit donc de chercher un élément du noyau à gauche de la matrice $(\boldsymbol{M} \mod 2)$, car

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_t) \in \mathbb{F}_2^t \text{ vérifie } \boldsymbol{uM} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_i \boldsymbol{e}(x_i) = \mathbf{0}\,.$$

Remarque. Pour que la matrice $(\boldsymbol{M} \mod 2)$ ait un noyau (à gauche) non-nul, il est suffisant que le nombre de lignes non-nulles de $(\boldsymbol{M} \mod 2)$ soit plus grand que le nombre de ses colonnes. En pratique, on souhaite donc que t soit sensiblement plus grand que s.

Étape III : exemple

Pour $N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$, supposons que l'on ait obtenu les éléments suivants :

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728
	$2^6 \times 7 \times 19$	$2^5 \times 7^3$	$2^8 \times 11$	$2^3 \times 7^2 \times 19^2$	$2^6 \times 7 \times 19^2$

Étape III : exemple

Pour $N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$, supposons que l'on ait obtenu les éléments suivants :

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728
	$2^6 \times 7 \times 19$	$2^5 \times 7^3$	$2^8 \times 11$	$2^3 \times 7^2 \times 19^2$	$2^6 \times 7 \times 19^2$

La matrice $\boldsymbol{M}$ est alors :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Étape III : exemple

Pour $N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$, supposons que l'on ait obtenu les éléments suivants :

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728
	$2^6 \times 7 \times 19$	$2^5 \times 7^3$	$2^8 \times 11$	$2^3 \times 7^2 \times 19^2$	$2^6 \times 7 \times 19^2$

La matrice $\boldsymbol{M}$ est alors :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Modulo 2, on obtient :

$$(\boldsymbol{M} \mod 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape III : exemple

Pour $N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$, supposons que l'on ait obtenu les éléments suivants :

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728
	$2^6 \times 7 \times 19$	$2^5 \times 7^3$	$2^8 \times 11$	$2^3 \times 7^2 \times 19^2$	$2^6 \times 7 \times 19^2$

La matrice $\boldsymbol{M}$ est alors :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Modulo 2, on obtient :

$$(\boldsymbol{M} \mod 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puis, on trouve un élément $\boldsymbol{u}$ tel que $\boldsymbol{u}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, par exemple

$$\boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 1, 1) \text{ ou encore } \boldsymbol{u} = (0, 0, 1, 0, 0)$$

Étape III : exemple

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{M} \mod 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 1, 1)$$

Étape III : exemple

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{M} \mod 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 1, 1)$$

On calcule $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{M} = (22, 6, 2, 4)$, donc on va construire

Étape III : exemple

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{M} \mod 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 1, 1)$$

On calcule $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{M} = (22, 6, 2, 4)$, donc on va construire

1. b une racine carrée de $Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5) = p_1^{22}\, p_2^6\, p_3^2\, p_4^4$, c'est-à-dire

$$b = p_1^{11}\, p_2^3\, p_3\, p_4^2 \equiv 369672 \mod N$$

Étape III : exemple

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{M} \mod 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 1, 1)$$

On calcule $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{M} = (22, 6, 2, 4)$, donc on va construire

1. b une racine carrée de $Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5) = p_1^{22}\, p_2^6\, p_3^2\, p_4^4$, c'est-à-dire

$$b = p_1^{11}\, p_2^3\, p_3\, p_4^2 \equiv 369672 \mod N$$

2. a le produit des $x_i + \lceil \sqrt{N} \rceil$ correspondant, donc

$$a = (x_2 + \lceil \sqrt{N} \rceil)(x_3 + \lceil \sqrt{N} \rceil)(x_4 + \lceil \sqrt{N} \rceil)(x_5 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \equiv 102784 \mod N$$

Étape III : exemple

x_i	6	8	24	106	120
$Q(x_i)$	8512	10976	30976	141512	161728

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{M} \mod 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 1, 1)$$

On calcule $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{M} = (22, 6, 2, 4)$, donc on va construire

1. b une racine carrée de $Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5) = p_1^{22}\, p_2^6\, p_3^2\, p_4^4$, c'est-à-dire

$$b = p_1^{11}\, p_2^3\, p_3\, p_4^2 \equiv 369672 \mod N$$

2. a le produit des $x_i + \lceil \sqrt{N} \rceil$ correspondant, donc

$$a = (x_2 + \lceil \sqrt{N} \rceil)(x_3 + \lceil \sqrt{N} \rceil)(x_4 + \lceil \sqrt{N} \rceil)(x_5 + \lceil \sqrt{N} \rceil) \equiv 102784 \mod N$$

Puis on a (finalement) :

$$\mathrm{pgcd}(a - b, N) = 457 \quad \text{et} \quad \mathrm{pgcd}(a + b, N) = 809\,.$$

Étape II : effritement (méthode naïve)

Deuxième étape : **effritement**, ou phase de collection

But : pour $t \geq s$, trouver t éléments de la forme $Q(x)$ qui se décomposent dans la base de facteurs $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$

Étape II : effritement (méthode naïve)

Deuxième étape : **effritement**, ou phase de collection

But : pour $t \geq s$, trouver t éléments de la forme $Q(x)$ qui se décomposent dans la base de facteurs $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\}$

Une première idée est de chercher ces éléments de manière itérative (x croissant de 1 en 1).

Étape II : effritement (méthode naïve)

Deuxième étape : **effritement**, ou phase de collection

But : pour $t \geq s$, trouver t éléments de la forme $Q(x)$ qui se décomposent dans la base de facteurs $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\}$

Une première idée est de chercher ces éléments de manière itérative (x croissant de 1 en 1).

COLLECTION D'ÉLEMENTS FRIABLES (MÉTHODE NAÏVE)

1. $i \leftarrow 0, \quad x = 0, \quad r = \lceil \sqrt{N} \rceil, \quad q = r^2 - N$
2. `liste_elements` $= []$
3. $\boldsymbol{M} = []$
4. **Tant que** $i < t$:
   - 4.1 **Si** q se décompose sur $\mathcal{P}$ comme $q = p_1^{e_1} \ldots p_s^{e_s}$
     - Ajouter le vecteur $(e_1, \ldots, e_s)$ comme dernière ligne de $\boldsymbol{M}$
     - Ajouter (x, q) à `liste_elements`
     - $i \leftarrow i + 1$
   - 4.2 $q \leftarrow q + 2(x + r) + 1$
   - 4.3 $x \leftarrow x + 1$
5. **Retourner** $\boldsymbol{M}$ et `liste_elements`

Exemple

$N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$.

x	$Q(x)$	$(e_1, \ldots, e_4)$	reste
0	1168	$[4,0,0,0]$	73
1	2387	$[0,1,1,0]$	31
2	3608	$[3,0,1,0]$	41
3	4831	$[0,0,0,0]$	4831
4	6056	$[3,0,0,0]$	757
5	7283	$[0,0,0,0]$	7283
6	**8512**	$\mathbf{[6,1,0,1]}$	**1**
7	9743	$[0,0,0,0]$	9743
8	**10976**	$\mathbf{[5,3,0,0]}$	**1**
9	12211	$[0,0,0,0]$	12211
⋮	⋮	⋮	⋮
23	29711	$[0,0,1,0]$	2701
24	**30976**	$\mathbf{[8,0,2,0]}$	**1**
25	32243	$[0,0,0,1]$	1697
⋮	⋮	⋮	⋮
106	**141512**	$\mathbf{[3,2,0,2]}$	**1**
⋮	⋮	⋮	⋮
120	**161728**	$\mathbf{[6,1,0,2]}$	**1**

$N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$.

x	$Q(x)$	$(e_1, \dots, e_4)$	reste
0	1168	$[4, 0, 0, 0]$	73
1	2387	$[0, 1, 1, 0]$	31
2	3608	$[3, 0, 1, 0]$	41
3	4831	$[0, 0, 0, 0]$	4831
4	6056	$[3, 0, 0, 0]$	757
5	7283	$[0, 0, 0, 0]$	7283
6	**8512**	$\mathbf{[6, 1, 0, 1]}$	**1**
7	9743	$[0, 0, 0, 0]$	9743
8	**10976**	$\mathbf{[5, 3, 0, 0]}$	**1**
9	12211	$[0, 0, 0, 0]$	12211
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	29711	$[0, 0, 1, 0]$	2701
24	**30976**	$\mathbf{[8, 0, 2, 0]}$	**1**
25	32243	$[0, 0, 0, 1]$	1697
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
106	**141512**	$\mathbf{[3, 2, 0, 2]}$	**1**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
120	**161728**	$\mathbf{[6, 1, 0, 2]}$	**1**

On obtient la liste

$$\{(6, 8512), (8, 10976), (24, 30976), (106, 141512), (120, 161728)\}$$

Exemple

$N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$.

x	$Q(x)$	$(e_1, \dots, e_4)$	reste
0	1168	$[4, 0, 0, 0]$	73
1	2387	$[0, 1, 1, 0]$	31
2	3608	$[3, 0, 1, 0]$	41
3	4831	$[0, 0, 0, 0]$	4831
4	6056	$[3, 0, 0, 0]$	757
5	7283	$[0, 0, 0, 0]$	7283
6	**8512**	$[\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}]$	**1**
7	9743	$[0, 0, 0, 0]$	9743
8	**10976**	$[\mathbf{5}, \mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$	**1**
9	12211	$[0, 0, 0, 0]$	12211
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	29711	$[0, 0, 1, 0]$	2701
24	**30976**	$[\mathbf{8}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{0}]$	**1**
25	32243	$[0, 0, 0, 1]$	1697
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
106	**141512**	$[\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{2}]$	**1**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
120	**161728**	$[\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2}]$	**1**

On obtient la liste

$$\{(6, 8512), (8, 10976), (24, 30976),$$
$$(106, 141512), (120, 161728)\}$$

Cela donne la matrice

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple

$N = 369713$ et $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 19\}$.

x	$Q(x)$	$(e_1, \ldots, e_4)$	reste
0	1168	$[4,0,0,0]$	73
1	2387	$[0,1,1,0]$	31
2	3608	$[3,0,1,0]$	41
3	4831	$[0,0,0,0]$	4831
4	6056	$[3,0,0,0]$	757
5	7283	$[0,0,0,0]$	7283
6	**8512**	$[\mathbf{6,1,0,1}]$	**1**
7	9743	$[0,0,0,0]$	9743
8	**10976**	$[\mathbf{5,3,0,0}]$	**1**
9	12211	$[0,0,0,0]$	12211
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	29711	$[0,0,1,0]$	2701
24	**30976**	$[\mathbf{8,0,2,0}]$	**1**
25	32243	$[0,0,0,1]$	1697
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
106	**141512**	$[\mathbf{3,2,0,2}]$	**1**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
120	**161728**	$[\mathbf{6,1,0,2}]$	**1**

On obtient la liste

$$\{(6, 8512), (8, 10976), (24, 30976), (106, 141512), (120, 161728)\}$$

Cela donne la matrice

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Problème. Pour chaque ligne calculée, on fait beaucoup de tests de divisibilité qui échouent. Autrement dit, il y a **beaucoup** de zéros dans les $(e_1, \ldots, e_s)$ calculés.

Étape II : effritement (méthode de criblage)

Idée : pour être plus efficace, on va collecter ces éléments par une méthode de **crible**.

Étape II : effritement (méthode de criblage)

Idée : pour être plus efficace, on va collecter ces éléments par une méthode de **crible**.

Remarque. La notion de crible a déjà été vue pour établir une liste de nombres premiers : c'est le **crible d'Eratostène**.

Étape II : effritement (méthode de criblage)

Idée : pour être plus efficace, on va collecter ces éléments par une méthode de **crible**.

Remarque. La notion de crible a déjà été vue pour établir une liste de nombres premiers : c'est le **crible d'Eratostène**.

Pour $A \geq s$ un entier dépendant de B qu'on déterminera plus tard :

MÉTHODE DE CRIBLE QUADRATIQUE (VERSION PÉDAGOGIQUE)

1. On initialise un tableau $T = [Q(0), Q(1), \ldots, Q(A)]$
2. Pour chaque premier $p \in \mathcal{P}$:
   - 2.1 $e = 1$
   - 2.2 Tant que $p^e \leq A$:
     - On cherche tous les $0 \leq y < p^e$ tels que p^e divise $T[y]$
     - On divise par p tous les $T[x]$ où x est de la forme $y + kp^e$ (criblage)
     - On incrémente $e \leftarrow e + 1$
3. **Retourner** tous les $(x, Q(x))$ tels que $T[x] = 1$.

Étape II : effritement (méthode de criblage)

Idée : pour être plus efficace, on va collecter ces éléments par une méthode de **crible**.

Remarque. La notion de crible a déjà été vue pour établir une liste de nombres premiers : c'est le **crible d'Eratostène**.

Pour $A \geq s$ un entier dépendant de B qu'on déterminera plus tard :

MÉTHODE DE CRIBLE QUADRATIQUE (VERSION PÉDAGOGIQUE)

1. On initialise un tableau $T = [Q(0), Q(1), \dots, Q(A)]$
2. Pour chaque premier $p \in \mathcal{P}$:
   2.1 $e = 1$
   2.2 Tant que $p^e \leq A$:
   - On cherche tous les $0 \leq y < p^e$ tels que p^e divise $T[y]$
   - On divise par p tous les $T[x]$ où x est de la forme $y + kp^e$ (criblage)
   - On incrémente $e \leftarrow e + 1$
3. **Retourner** tous les $(x, Q(x))$ tels que $T[x] = 1$.

Remarques :

- la recherche de solution de $Q(y) \equiv N \mod p$ est essentiellement une recherche de racine carrée ($\rightarrow$ Tonelli-Shanks, ou Cipolla)
- on peut déduire très efficacement les solutions modulo p^e des solutions modulo p^{e-1} (relèvement de Hensel).

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	[0]	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	[0]	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2, 8, 10, 0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	[0]	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	[2, 0]	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	[2, 4, 6, 0]	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	[2, 8, 10, 0]	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	[0, 2]	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2, 8, 10, 0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	$[0, 2]$	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
7	1	$[4, 0]$	1	767	41	1859	43	2959	439	581	289	5183	359	901	859	7439	143	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2,0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2,4,6,0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2,8,10,0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	$[0,2]$	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
7	1	$[4,0]$	1	767	41	1859	43	2959	439	581	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
	2	$[7]$	1	767	41	1859	43	2959	439	83	289	5183	359	901	859	7439	143	8579

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2, 8, 10, 0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	$[0, 2]$	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
7	1	$[4, 0]$	1	767	41	1859	43	2959	439	581	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
	2	$[7]$	1	767	41	1859	43	2959	439	83	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
11	1	$[5, 3]$	1	767	41	169	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	13	8579

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2, 8, 10, 0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	$[0, 2]$	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
7	1	$[4, 0]$	1	767	41	1859	43	2959	439	581	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
	2	$[7]$	1	767	41	1859	43	2959	439	83	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
11	1	$[5, 3]$	1	767	41	169	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	13	8579
13	1	$[3, 1]$	1	59	41	13	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	1	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2, 8, 10, 0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	$[0, 2]$	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
7	1	$[4, 0]$	1	767	41	1859	43	2959	439	581	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
	2	$[7]$	1	767	41	1859	43	2959	439	83	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
11	1	$[5, 3]$	1	767	41	169	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	13	8579
13	1	$[3, 1]$	1	59	41	13	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	1	8579
	2	$[3]$	1	59	41	1	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	1	8579

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2, 8, 10, 0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	$[0, 2]$	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
7	1	$[4, 0]$	1	767	41	1859	43	2959	439	581	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
	2	$[7]$	1	767	41	1859	43	2959	439	83	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
11	1	$[5, 3]$	1	767	41	169	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	13	8579
13	1	$[3, 1]$	1	59	41	13	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	1	8579
	2	$[3]$	1	59	41	1	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	1	8579

Et on obtient la liste $\{(0, 224), (3, 1859), (14, 8008)\}$

Exemple de crible

Pour $N = 73217 = 211 \times 347$ (nouveau N) avec la base de facteurs $\mathcal{P} = \{2, 7, 11, 13\}$.

Les étapes successives de l'algorithme sont :

p	e	solutions	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
			224	767	1312	1859	2408	2959	3512	4067	4624	5183	5744	6307	6872	7439	8008	8579
2	1	$[0]$	112	767	656	1859	1204	2959	1756	4067	2312	5183	2872	6307	3436	7439	4004	8579
	2	$[2, 0]$	56	767	328	1859	602	2959	878	4067	1156	5183	1436	6307	1718	7439	2002	8579
	3	$[2, 4, 6, 0]$	28	767	164	1859	301	2959	439	4067	578	5183	718	6307	859	7439	1001	8579
	4	$[2, 8, 10, 0]$	14	767	82	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
	5	$[0, 2]$	7	767	41	1859	301	2959	439	4067	289	5183	359	6307	859	7439	1001	8579
7	1	$[4, 0]$	1	767	41	1859	43	2959	439	581	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
	2	$[7]$	1	767	41	1859	43	2959	439	83	289	5183	359	901	859	7439	143	8579
11	1	$[5, 3]$	1	767	41	169	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	13	8579
13	1	$[3, 1]$	1	59	41	13	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	1	8579
	2	$[3]$	1	59	41	1	43	269	439	83	289	5183	359	901	859	7439	1	8579

Et on obtient la liste $\{(0, 224), (3, 1859), (14, 8008)\}$

La matrice associée est

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Améliorations

Observation 1. Les termes du tableau peuvent être initialement grands, et leur division par des premiers est légèrement coûteuse en pratique.

Améliorations

Observation 1. Les termes du tableau peuvent être initialement grands, et leur division par des premiers est légèrement coûteuse en pratique. Pour éviter cela, on peut

- remplacer les valeurs exactes $Q(x)$ par $T[x] = \lfloor \log Q(x) \rfloor$
- soustraire $\lfloor \log p \rfloor$ (précalculé) à $T[x]$ au lieu de diviser $T[x]$ par p
- en fin d'algorithme, plutôt que de tester si $T[x] = 1$, on vérifie si $|T[x]| \leq \log B^2$

Observation 1. Les termes du tableau peuvent être initialement grands, et leur division par des premiers est légèrement coûteuse en pratique. Pour éviter cela, on peut

- remplacer les valeurs exactes $Q(x)$ par $T[x] = \lfloor \log Q(x) \rfloor$
- soustraire $\lfloor \log p \rfloor$ (précalculé) à $T[x]$ au lieu de diviser $T[x]$ par p
- en fin d'algorithme, plutôt que de tester si $T[x] = 1$, on vérifie si $|T[x]| \leq \log B^2$

Observation 2. Si A est grand, il devient peu probable que $Q(x)$ soit B-friable lorsque x s'approche de A.

Observation 1. Les termes du tableau peuvent être initialement grands, et leur division par des premiers est légèrement coûteuse en pratique. Pour éviter cela, on peut

- remplacer les valeurs exactes $Q(x)$ par $T[x] = \lfloor \log Q(x) \rfloor$
- soustraire $\lfloor \log p \rfloor$ (précalculé) à $T[x]$ au lieu de diviser $T[x]$ par p
- en fin d'algorithme, plutôt que de tester si $T[x] = 1$, on vérifie si $|T[x]| \leq \log B^2$

Observation 2. Si A est grand, il devient peu probable que $Q(x)$ soit B-friable lorsque x s'approche de A.

Idée : on remplace $Q(x)$ par des $Q_{u,v}(x) = Q(ux + v)$ où u et v sont choisis de telle sorte que $Q_{u,v}(x)$ donne des nombres « petits » modulo N, lorsque $x \in [0, A]$.

C'est la variante dite « à **polynômes multiples** » ;

- cela permet de réduire sensiblement la taille de A,
- on peut choisir avantageusement u et v pour produire beaucoup de relations.

Résumé de l'algorithme

FACTORISATION PAR CRIBLE QUADRATIQUE (PÉDAGOGIQUE)

Entrée : N un entier à factoriser
Sortie : un facteur propre de N

1. **Initialisation** : calculer $B \simeq 2^{0.5\sqrt{\log N \log\log N}}$ (on verra pourquoi)
2. Calculer la **base de facteurs** $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$ tels que $p_j \leq B$ et $\left(\frac{N}{p_j}\right) = 1$.
3. **Effritement** :
   3.1 Calculer la matrice $\boldsymbol{M}$ et les éléments $\{(x, Q(x))\}$ associés par criblage.
   3.2 Si $\boldsymbol{M}$ a un noyau à gauche nul, revenir à 2. avec $B \leftarrow 2B$.
4. **Algèbre linéaire** :
   4.1 Calculer une solution aléatoire $\boldsymbol{u}$ de $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{M} \bmod 2) = \boldsymbol{0}$
   4.2 Calculer $a = \prod_{j \in J}(x_j + \lceil\sqrt{N}\rceil)$ et $b = \prod_{j \in J} Q(x_j)$ où $J = \{j, u_j \neq 0\}$.
5. **Si** $\{\mathrm{pgcd}(a-b, N), \mathrm{pgcd}(a+b, N)\}$ ne contient pas de facteur propre de N, revenir à l'étape 4.1.
6. **Sinon,** retourner les facteurs propres obtenus.

Qu'en est-il de la **complexité** de l'algorithme ?

D’abord, **quelques résultats de théorie des nombres.**

D'abord, **quelques résultats de théorie des nombres.**

Soit M un entier ≥ 2.

Théorème de Tchebychev. Le nombre $\pi(M)$ de nombres premiers compris entre 2 et M vérifie

$$\alpha \frac{M}{\log M} \leq \pi(M) \leq \beta \frac{M}{\log M} .$$

Complexité du crible quadratique

D'abord, **quelques résultats de théorie des nombres.**

Soit M un entier ≥ 2.

Théorème de Tchebychev. Le nombre $\pi(M)$ de nombres premiers compris entre 2 et M vérifie
$$\alpha \frac{M}{\log M} \leq \pi(M) \leq \beta \frac{M}{\log M} .$$

Remarque. Les théorèmes de Hadamard et de de la Vallée-Poussin assurent $\pi(M) \sim \frac{M}{\ln M}$.

Complexité du crible quadratique

D'abord, **quelques résultats de théorie des nombres.**

Soit M un entier ≥ 2.

Théorème de Tchebychev. Le nombre $\pi(M)$ de nombres premiers compris entre 2 et M vérifie

$$\alpha \frac{M}{\log M} \leq \pi(M) \leq \beta \frac{M}{\log M}\,.$$

Remarque. Les théorèmes de Hadamard et de de la Vallée-Poussin assurent $\pi(M) \sim \frac{M}{\ln M}$.

On définit la **fonction de de Bruijn** $\psi(M, B)$ comme le nombre d'entiers $\leq M$ qui sont B-friables.

Complexité du crible quadratique

D'abord, **quelques résultats de théorie des nombres.**

Soit M un entier ≥ 2.

Théorème de Tchebychev. Le nombre $\pi(M)$ de nombres premiers compris entre 2 et M vérifie

$$\alpha \frac{M}{\log M} \leq \pi(M) \leq \beta \frac{M}{\log M} \,.$$

Remarque. Les théorèmes de Hadamard et de de la Vallée-Poussin assurent $\pi(M) \sim \frac{M}{\ln M}$.

On définit la **fonction de de Bruijn** $\psi(M,B)$ comme le nombre d'entiers $\leq M$ qui sont B-friables.

Proposition. Si $\log M \ll B \ll M$, alors $\psi(M,B)$ vérifie

$$\frac{\psi(M,B)}{M} \sim \left(\frac{\log M}{\log B}\right)^{-(\log M)/(\log B)} \,.$$

Complexité du crible quadratique

Étape 1 : base de facteurs

- Il y a $\pi(B)$ premiers pour lequels on doit tester la résiduosité quadratique de N
  $\to$ complexité en $O(B \log B \log N)$
  $\to$ on a donc $s \simeq \pi(B)/2$ premiers dans $\mathcal{P}$

Complexité du crible quadratique

Étape 1 : base de facteurs

- Il y a $\pi(B)$ premiers pour lequels on doit tester la résiduosité quadratique de N
  $\rightarrow$ complexité en $O(B \log B \log N)$
  $\rightarrow$ on a donc $s \simeq \pi(B)/2$ premiers dans $\mathcal{P}$

Étape 2 : effritement par crible. Soit M la taille maximale d'un entier $Q(x)$ à traiter.

- Alors, il faudra traiter $s \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}$ entiers en moyenne

Étape 1 : base de facteurs

- Il y a $\pi(B)$ premiers pour lequels on doit tester la résiduosité quadratique de N
  $\rightarrow$ complexité en $O(B \log B \log N)$
  $\rightarrow$ on a donc $s \simeq \pi(B)/2$ premiers dans $\mathcal{P}$

Étape 2 : effritement par crible. Soit M la taille maximale d'un entier $Q(x)$ à traiter.

- Alors, il faudra traiter $s \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}$ entiers en moyenne
- On peut montrer que pour chaque entier du tableau, on fait $O(\log \log B)$ opérations

Complexité du crible quadratique

Étape 1 : base de facteurs

- Il y a $\pi(B)$ premiers pour lequels on doit tester la résiduosité quadratique de N
  $\rightarrow$ complexité en $O(B \log B \log N)$
  $\rightarrow$ on a donc $s \simeq \pi(B)/2$ premiers dans $\mathcal{P}$

Étape 2 : effritement par crible. Soit M la taille maximale d'un entier $Q(x)$ à traiter.

- Alors, il faudra traiter $s \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}$ entiers en moyenne
- On peut montrer que pour chaque entier du tableau, on fait $O(\log \log B)$ opérations
- La complexité est donc $C_2 = O(s \log \log B \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}) = O(B \frac{\log \log B}{\log B} u^u)$ où $u = \frac{\log M}{\log B}$

Complexité du crible quadratique

Étape 1 : base de facteurs

- Il y a $\pi(B)$ premiers pour lequels on doit tester la résiduosité quadratique de N
  $\to$ complexité en $O(B \log B \log N)$
  $\to$ on a donc $s \simeq \pi(B)/2$ premiers dans $\mathcal{P}$

Étape 2 : effritement par crible. Soit M la taille maximale d'un entier $Q(x)$ à traiter.

- Alors, il faudra traiter $s \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}$ entiers en moyenne
- On peut montrer que pour chaque entier du tableau, on fait $O(\log \log B)$ opérations
- La complexité est donc $C_2 = O(s \log \log B \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}) = O(B \frac{\log \log B}{\log B} u^u)$ où $u = \frac{\log M}{\log B}$
- Si $M \simeq \sqrt{N}$ et $\log B \geq \sqrt{\log N}$, alors on obtient :

$$\log C_2 \simeq \log B + \frac{\log N \log \log N}{4 \log B}$$

Complexité du crible quadratique

Étape 1 : base de facteurs

- Il y a $\pi(B)$ premiers pour lequels on doit tester la résiduosité quadratique de N
  $\to$ complexité en $O(B \log B \log N)$
  $\to$ on a donc $s \simeq \pi(B)/2$ premiers dans $\mathcal{P}$

Étape 2 : effritement par crible. Soit M la taille maximale d'un entier $Q(x)$ à traiter.

- Alors, il faudra traiter $s \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}$ entiers en moyenne
- On peut montrer que pour chaque entier du tableau, on fait $O(\log \log B)$ opérations
- La complexité est donc $C_2 = O(s \log \log B \cdot \frac{M}{\psi(M,B)}) = O(B \frac{\log \log B}{\log B} u^u)$ où $u = \frac{\log M}{\log B}$
- Si $M \simeq \sqrt{N}$ et $\log B \geq \sqrt{\log N}$, alors on obtient :

$$\log C_2 \simeq \log B + \frac{\log N \log \log N}{4 \log B}$$

Cette dernière quantité se maximise pour $\log B \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\log N \log \log N}$, donc $B \in L_{\log N}[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et donne

$$C_2 = \exp(\sqrt{\log N \log \log N}) = L_{\log N}[\tfrac{1}{2}, 1]\,.$$

Étape 3 : algèbre linéaire.

- On résout un système linéaire **creux** de taille $t \times s$ sur $\mathbb{F}_2$ où $t \simeq s \in O(\frac{B}{\log B})$

Complexité du crible quadratique

Étape 3 : algèbre linéaire.

- On résout un système linéaire **creux** de taille $t \times s$ sur $\mathbb{F}_2$ où $t \simeq s \in O(\frac{B}{\log B})$
  $\to$ Par l'algorithme de Wiedemann (par exemple), on a une complexité en

$$O(ts) = O(B^2 / \log^2 B) = O(\exp(\sqrt{\log N \log \log N})) = O(L_{\log N}[\tfrac{1}{2}, 1])$$

Étape 3 : algèbre linéaire.

- On résout un système linéaire **creux** de taille $t \times s$ sur $\mathbb{F}_2$ où $t \simeq s \in O(\frac{B}{\log B})$
  $\rightarrow$ Par l'algorithme de Wiedemann (par exemple), on a une complexité en

$$O(ts) = O(B^2 / \log^2 B) = O(\exp(\sqrt{\log N \log \log N})) = O(L_{\log N}[\tfrac{1}{2}, 1])$$

- Calculs terminaux (produits, pgcd) en $O(B \log^2 N)$

Étape 3 : algèbre linéaire.

- On résout un système linéaire **creux** de taille $t \times s$ sur $\mathbb{F}_2$ où $t \simeq s \in O(\frac{B}{\log B})$
  $\rightarrow$ Par l'algorithme de Wiedemann (par exemple), on a une complexité en

$$O(ts) = O(B^2 / \log^2 B) = O(\exp(\sqrt{\log N \log\log N})) = O(L_{\log N}[\tfrac{1}{2}, 1])$$

- Calculs terminaux (produits, pgcd) en $O(B \log^2 N)$

Conclusion. L'algorithme de crible quadratique permet de factoriser un entier N en temps

$$O(\exp(\sqrt{\log N \log\log N}))\,.$$

démo avec sage

Crible algébrique

Le **crible algébrique** généralise l'idée du crible quadratique. L'idée est de chercher des $a^2 \equiv b^2 \mod N$ en cherchant des carrés dans des **anneaux d'entiers**.

Crible algébrique

Le **crible algébrique** généralise l'idée du crible quadratique. L'idée est de chercher des $a^2 \equiv b^2 \mod N$ en cherchant des carrés dans des **anneaux d'entiers**.

Idée. Soit $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible, et $m \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $f(m) \equiv 0 \mod N$. En posant $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{Z}[X]/(f)$, on a $\mathbb{Z}[X]/(f) = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Crible algébrique

Le **crible algébrique** généralise l'idée du crible quadratique. L'idée est de chercher des $a^2 \equiv b^2 \mod N$ en cherchant des carrés dans des **anneaux d'entiers**.

Idée. Soit $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible, et $m \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $f(m) \equiv 0 \mod N$. En posant $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{Z}[X]/(f)$, on a $\mathbb{Z}[X]/(f) = \mathbb{Z}[\alpha]$.

On considère ensuite le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rccc} \phi & : \mathbb{Z}[\alpha] & \to & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ & P(\alpha) & \mapsto & \overline{P}(m) \mod N \end{array}$$

Alors on cherche $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha)$ est un carré $z^2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et $\overline{P}(m)$ est un carré $b^2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Si $a = \phi(z)$, alors $a^2 \equiv b^2 \mod N$.

Ensuite, pour trouver les éléments P, on va cribler les **normes** d'éléments $u + v\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ (analogues des petits p_i pour le crible quadratique).

Crible algébrique

Le **crible algébrique** généralise l'idée du crible quadratique. L'idée est de chercher des $a^2 \equiv b^2 \mod N$ en cherchant des carrés dans des **anneaux d'entiers**.

Idée. Soit $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible, et $m \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $f(m) \equiv 0 \mod N$. En posant $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{Z}[X]/(f)$, on a $\mathbb{Z}[X]/(f) = \mathbb{Z}[\alpha]$.

On considère ensuite le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rccc} \phi & : \mathbb{Z}[\alpha] & \to & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ & P(\alpha) & \mapsto & \overline{P}(m) \mod N \end{array}$$

Alors on cherche $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha)$ est un carré $z^2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et $\overline{P}(m)$ est un carré $b^2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Si $a = \phi(z)$, alors $a^2 \equiv b^2 \mod N$.

Ensuite, pour trouver les éléments P, on va cribler les **normes** d'éléments $u + v\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ (analogues des petits p_i pour le crible quadratique).

La phase d'algèbre linéaire est sensiblement identique à cele du crible quadratique

Crible algébrique

Le **crible algébrique** généralise l'idée du crible quadratique. L'idée est de chercher des $a^2 \equiv b^2 \mod N$ en cherchant des carrés dans des **anneaux d'entiers**.

Idée. Soit $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible, et $m \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $f(m) \equiv 0 \mod N$. En posant $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{Z}[X]/(f)$, on a $\mathbb{Z}[X]/(f) = \mathbb{Z}[\alpha]$.

On considère ensuite le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rcl} \phi \quad : \mathbb{Z}[\alpha] & \to & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ P(\alpha) & \mapsto & \overline{P}(m) \mod N \end{array}$$

Alors on cherche $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha)$ est un carré $z^2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et $\overline{P}(m)$ est un carré $b^2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Si $a = \phi(z)$, alors $a^2 \equiv b^2 \mod N$.

Ensuite, pour trouver les éléments P, on va cribler les **normes** d'éléments $u + v\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ (analogues des petits p_i pour le crible quadratique).

La phase d'algèbre linéaire est sensiblement identique à cele du crible quadratique

Au final, on obtient une **complexité** du crible algébrique en

$$O\left(\exp((\tfrac{64}{9}\log N)^{1/3}(\log\log N)^{2/3})\right).$$

Crible algébrique

Le **crible algébrique** généralise l'idée du crible quadratique. L'idée est de chercher des $a^2 \equiv b^2 \mod N$ en cherchant des carrés dans des **anneaux d'entiers**.

Idée. Soit $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible, et $m \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $f(m) \equiv 0 \mod N$. En posant $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{Z}[X]/(f)$, on a $\mathbb{Z}[X]/(f) = \mathbb{Z}[\alpha]$.

On considère ensuite le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rlcl} \phi & : \mathbb{Z}[\alpha] & \to & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ & P(\alpha) & \mapsto & \overline{P}(m) \mod N \end{array}$$

Alors on cherche $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha)$ est un carré $z^2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et $\overline{P}(m)$ est un carré $b^2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Si $a = \phi(z)$, alors $a^2 \equiv b^2 \mod N$.

Ensuite, pour trouver les éléments P, on va cribler les **normes** d'éléments $u + v\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ (analogues des petits p_i pour le crible quadratique).

La phase d'algèbre linéaire est sensiblement identique à cele du crible quadratique

Au final, on obtient une **complexité** du crible algébrique en

$$O\left(\exp((\tfrac{64}{9}\log N)^{1/3}(\log\log N)^{2/3})\right).$$

A Tale of Two Sieves. C. Pomerance. Notices of the AMS. **1996**. . [lien].

Prime Numbers, a Computational Perspective. R. Crandall, C. Pomerance. Springer. **2001**.

En pratique

Pour extraire des facteurs de taille $\leq$ 60-70 chiffres (« moyens »), on utilise la **méthode ECM**. Le record de factorisation d'ECM a produit un facteur de 83 chiffres.

Pour des facteurs de taille plus importante, on utilise le **crible algébrique**.

Pour extraire des facteurs de taille $\leq$ 60-70 chiffres (« moyens »), on utilise la **méthode ECM**. Le record de factorisation d'ECM a produit un facteur de 83 chiffres.

Pour des facteurs de taille plus importante, on utilise le **crible algébrique**.

Le **record** de factorisation de modules RSA est RSA-250, effectuée en février 2020 :

$$
\begin{aligned}
& 2140324650240744961264423072839333563008614715144755017797754920881418023447140136643 \\
& 3455190958046796109928518724709145876873962619215573630474547705208051190564931066 8 \\
& 7691590019759405693457452230589325976697471681738069364894699871578494975937497937 \\
= \ & 6413528947707158027879019017057738908482501474294344720811685963202453234463023862 35 \\
& 98752668347708737661925585694639798853367 \\
\times \ & 3337202759497815655622601060535511422794076034476755466678452098702384172921003708 02 \\
& 57448673296881877565718986258036932062711
\end{aligned}
$$

En pratique

Pour extraire des facteurs de taille $\leq$ 60-70 chiffres (« moyens »), on utilise la **méthode ECM**. Le record de factorisation d'ECM a produit un facteur de 83 chiffres.

Pour des facteurs de taille plus importante, on utilise le **crible algébrique**.

Le **record** de factorisation de modules RSA est RSA-250, effectuée en février 2020 :

$$
\begin{aligned}
& 2140324650240744961264423072839333563008614715144755017797754920881418023447140136643 \\
& \quad 3455190958046796109928518724709145876873962619215573630474547705208051190564931066876 \\
& \quad 915900197594056934574522305893259766974716817380693648946998715784949758937497937
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & 64135289477071580278790190170577389084825014742943447208116859632024532344630238623598752668347708737661925585694639798853367 \\
\times {} & 33372027594978156556226010605355114227940760344767554666784520987023841729210037080257448673296881877565718986258036932062711
\end{aligned}
$$

Temps

Temps de factorisation : équivalent 2700 années (oui !) de calcul sur 1 coeur.

Source :
`https://lists.gforge.inria.fr/pipermail/cado-nfs-discuss/2020-February/001166.html`

En pratique

Une **implémentation** proche de l'état de l'art de la recherche : CADO-NFS

- majoritairement codé en `C`, `C++`, plus de l'assembleur pour accélérer certains calculs
- licence LGPL (libre), développé principalement en France (notamment une équipe Inria à Nancy)
- permet de factoriser sur un processeur standard (Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2650 @2.00GHz) : (source : site web cado-nfs)

RSA-120	RSA-130	RSA-140	RSA-155
1,9 heure	7,5 heures	23 heures	5,3 jours

- utilisé pour la factorisation record

En pratique

Une **implémentation** proche de l'état de l'art de la recherche : CADO-NFS

– majoritairement codé en `C`, `C++`, plus de l'assembleur pour accélérer certains calculs
– licence LGPL (libre), développé principalement en France (notamment une équipe Inria à Nancy)
– permet de factoriser sur un processeur standard (Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2650 @2.00GHz) : (source : site web cado-nfs)

RSA-120	RSA-130	RSA-140	RSA-155
1,9 heure	7,5 heures	23 heures	5,3 jours

– utilisé pour la factorisation record

CADO-NFS, An Implementation of the Number Field Sieve Algorithm. The CADO-NFS Development Team. . **2017**. `http://cado-nfs.gforge.inria.fr`

Fin du cours

Questions ?