Université Paris 8 Année 2021–2022

L2 Mathématiques

Logiciel de calcul formel – Projet à la maison

15 mars 2022

Consignes. Vous devez rendre ce projet, sur Moodle, jusqu'au dimanche 1er mai 2022. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.

Les documents à rendre sont les suivants :

1. Un fichier au format `.ipynb` qui contient votre code (réponses aux questions de programmation, représentées par l'icône 💻).
2. Un fichier au format `.pdf` qui contient vos réponses aux questions d'analyse / de rédaction (représentées par l'icône ✎).

Le format des fichiers devra être respecté, sans quoi vous serez pénalisé. La qualité de la rédaction, et la lisibilité du code auront une part importante dans l'évaluation.

Vous pouvez travailler par groupe de **deux personnes maximum**. Dans ce cas, vous préciserez très clairement, en début du fichier `.pdf` à rendre, avec qui vous avez réalisé ce projet. Par ailleurs, **chaque membre du groupe doit rendre le projet sur Moodle**.

Ce projet est constitué de 2 exercices indépendants. Le barème approximatif est le suivant :

1. Exercice 1 : $\simeq$ 15 points.
2. Exercice 2 : $\simeq$ 5 points.

Les questions précédées du symbole $(\star)$ sont plus difficiles, n'hésitez pas à les passer ou à les traiter partiellement (en argumentant l'avancée de vos réflexions, vos difficultés).

Exercice 1. Autour des nombres de Fibonacci.

La suite de Fibonacci est une suite récurrente d'ordre 2 définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad \text{et} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geq 2\,.$$

Ainsi, les 8 premiers termes de la suite (F_n) sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

Question 1.– 💻 Dans Sagemath, implanter une fonction `fibonacci(n)` qui calcule le nombre F_n pour n'importe quel entier $n \geq 0$. Il est conseillé d'écrire une fonction itérative. On vérifiera que $F_{30} = 832040$.

Question 2.– ✎ Grâce à la fonction que vous avez implantée, répondre aux questions suivantes :

1. Donnez les dix derniers chiffres de l'entier F_{2022} (autrement dit, donnez le reste de la division euclidienne de F_{2022} par 10^{10}).
2. Trouvez l'unique entier n compris entre 200 et 400 tel que F_n est un nombre premier.
3. Parmi les 1000 premiers nombres de Fibonacci, combien sont divisibles par 11 ?

On considère maintenant la matrice

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit également le vecteur

$$v_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Question 3.– ✎ Exprimer v_{n+1} en fonction de la matrice $\boldsymbol{M}$ et du vecteur v_n. En déduire que F_n est le premier coefficient du vecteur $\boldsymbol{M}^{n-1}v_1$.

Question 4.– 💻 Dans Sagemath, définir la matrice $\boldsymbol{M}$. Puis :

1. Calculer le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$.
2. Calculer l'expression exacte des valeurs propres de $\boldsymbol{M}$.
3. Calculer une diagonalisation de $\boldsymbol{M}$. Autrement dit, donner les matrices $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{D}$ telles que $\boldsymbol{D}$ est diagonale et $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$.

On rappelle que pour obtenir les expressions symboliques de racines de polynômes, on peut se placer dans la structure `SR` (`Symbolic Ring`). En rechanche, la diagonalisation de matrice est impossible dans la structure `SR`. On pourra alors se placer dans `RR` ou `CC` pour avoir des valeurs approchées des racines, ou dans la structure algébrique `QQbar` pour en avoir une expression algébrique.

On note ϕ l'unique valeur propre positive de $\boldsymbol{M}$.

Question 5.– ✎ Déduire des questions précédentes une expression de F_n en fonction de ϕ et de n. On détaillera bien le raisonnement.

Application n°1 : décomposition d'un entier comme somme de nombres de Fibonacci. On peut démontrer qu'il est possible d'écrire tout nombre entier comme une somme de nombres de Fibonacci distincts. Par exemple,

$$11 = 8 + 3 = F_6 + F_4$$

et

$$1111 = 987 + 89 + 34 + 1 = F_{16} + F_{11} + F_9 + F_2 .$$

Le but des deux questions suivantes est de calculer cette décomposition. Plus précisément, étant donné un entier $A \geq 1$, on souhaite trouver une liste d'entiers $I = [i_1, \ldots, i_k]$ telle que

$$A = \sum_{i \in I} F_i = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k}$$

L'Algorithme 1 décrit une méthode dite « gloutonne » pour retrouver cette liste I.

Question 6.– 💻 Implanter dans Sagemath l'Algorithme 1. Vous pourrez vérifier la validité de votre implantation avec les deux exemples donnés ci-dessus.

Question 7.– ✎ Trouver les décompositions de $A = 1234567890$ et de $B = 2^{40}$ comme somme de nombres de Fibonacci.

Application n°2 : spirale logarithmique. La spirale logarithmique est une courbe composée d'arcs de cercles reliés continuement, dont les rayons croissent comment les nombres de Fibonacci. Elle se définit graphiquement de manière itérative.

Algorithme 1 : Algorithme « glouton » pour l'écriture d'un entier comme somme de nombres de Fibonacci.

Entrée : Un entier $A \geq 1$.
Sortie : Une liste I d'entiers positifs distincts tels que $A = \sum_{i \in I} F_i$.

Trouver un entier s tel que $F_{s-1} \leq A < F_s$.
Initialiser I comme une liste vide
Tant que $A > 0$ **faire**
    Ajouter l'entier $s - 1$ à la liste I
    Retrancher F_{s-1} à A
    Trouver un nouvel entier s tel que $F_{s-1} \leq A < F_s$.
Retourner I.

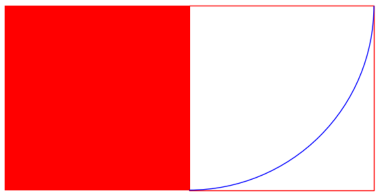

FIGURE 1 – Première étape de la construction de la spirale. À gauche, le carré C_0, à droite, le carré C_1 contenant un arc de cercle bleu.

On commence par tracer un carré rouge plein (nommons-le C_0), de côté 1, au centre de sa figure. On lui colle, à sa droite, un carré C_1 de côté 1 également (aussi en rouge sur la Figure 1), puis un quart d'arc de cercle (en bleu sur la Figure 1) dont le centre est le coin supérieur gauche de C_1, et dont le rayon est 1.

Pour continuer le procédé, on va faire croître le côté des carrés (ou de manière équivalente, le rayon des cercles). On colle aux deux premiers carrés un troisième carré C_2, celui-ci de côté 2 (toujours en rouge). On définit ensuite le quart d'arc de cercle inclus dans C_2, afin que la spirale soit continue. Voir Figure 2.

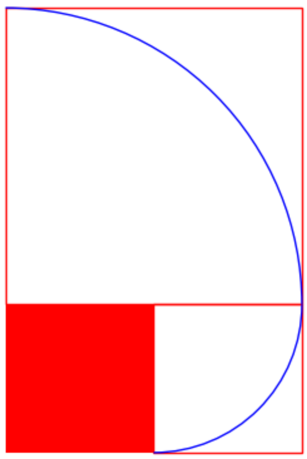

FIGURE 2 – Seconde étape de la construction de la spirale. En bas, les deux premiers carrés de l'étape 1 (voir Figure 2). En haut, le nouveau carré C_2, contenant un arc de cercle bleu de rayon égal à 2.

On itère ensuite ce procédé jusqu'à obtenir une spirale de plus grande ampleur. On colle un carré C_3 de côté 3 à gauche de la construction pour obtenir la spirale à l'ordre 3. Puis un carré C_4 de coté 5 en bas, afin d'avoir la spirale à l'ordre 4. Voir la Figure 3 pour une illustration de ces spirales partielles.

Enfin, la Figure 4 représente les deux étapes suivantes.

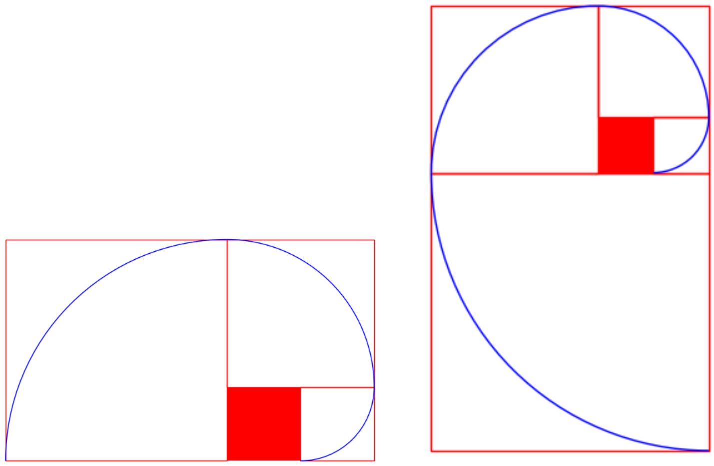

Figure 3 – Étapes 3 et 4 du tracé de la spirale

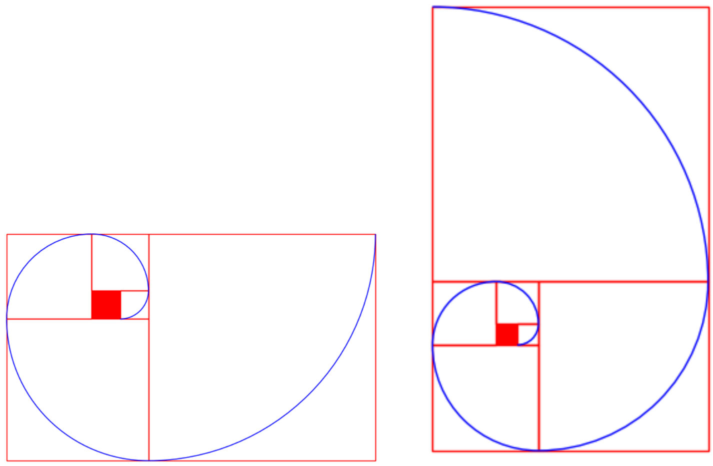

Figure 4 – Étapes 5 et 6 du tracé de la spirale

Le but des dernières questions de l'exercice est de tracer la spirale logarithmique (c'est-à-dire la courbe bleue) à un ordre quelconque.

Question 8.– Trouver une fonction Sagemath qui trace un arc de cercle, centré en point (x, y), de rayon r et de secteur d'angle (θ_1, θ_2). Puis, tracer comme exemple l'arc de cercle de centre $(0, 0)$, de rayon 1 et de secteur d'angle $(-\pi/2, 0)$.

Les questions suivantes sont plus difficiles.

Question 9.– $(\star)$ Donner, en justifiant aussi précisément que possible :

- la relation de récurrence entre les centres (x_n, y_n) des arcs de cercle à tracer,
- la valeur du rayon r_n de l'arc à tracer.

Question 10.– $(\star)$ Écrire une fonction qui trace la spirale logarithmique d'ordre n, pour n'importe quel $n \geq 1$.

Exercice 2. Chasse au trésor.

valeur (centimes)	1	2	5	10	20	50	100	200
masse (g)	2.30	3.06	3.92	4.10	5.74	7.80	7.50	8.50
diamètre (mm)	16.25	18.75	21.25	19.75	22.25	24.25	23.25	25.75
épaisseur (mm)	1.67	1.67	1.67	1.93	2.14	2.38	2.33	2.20
métal (C : cuivre, O : or, A : autre)	C	C	C	O	O	O	A	A

TABLE 1 – Informations physiques sur les pièces de monnaie en euro.

Alice trouve dans un coffre un trésor, constitué d'une quantité importante de pièces de monnaie. Elle voudrait connaître la somme correspondante sans faire directement le calcul. Pour cela, elle remarque d'abord :

— qu'il y a exactement 700 pièces au total,
— que 40% des pièces sont des pièces de 1 centime ou de 10 centimes,
— qu'il y a autant de pièces en cuivre que de pièces en or.

On note x_i le nombre de pièces de valeur i dans le trésor, et on représente par

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_5, x_{10}, x_{20}, x_{50}, x_{100}, x_{200})$$

le vecteur des 8 inconnues. Pour trouver la valeur totale du trésor, on va chercher à résoudre un système linéaire dont les inconnues sont $\boldsymbol{x}$.

Question 1.– ✎ Écrire trois équations affines, en les inconnues $\boldsymbol{x}$, qui formalisent les informations obtenues par Alice jusqu'à maintenant. A t-elle obtenu suffisamment d'information pour retrouver la valeur du trésor ? Pourquoi ?

Ensuite, à l'aide de mesure « physiques » et en s'aidant du tableau d'information ci-dessus (Table 1), Alice obtient d'autres d'informations sur le contenu du trésor.

— D'abord, avec une balance moyennement précise, elle pèse l'ensemble des pièces et obtient une masse totale de 3.5 kg.
— Puis, en plongeant les pièces dans un volume d'eau, elle observe que le niveau monte d'environ un demi-litre ; elle considère donc que le volume des pièces est de 500 cm^3.
— En empilant les pièces, elle estime qu'elle obtient une hauteur totale d'environ 1.4 m.
— Enfin, parmi toutes les pièces, elle arrive à en faire passer 413 dans un trou de diamètre exactement 20mm.

Question 2.– 💻 On modélise chaque pièce comme un cylindre dont l'épaisseur et le diamètre sont donnés dans la Table 1. Écrire une fonction qui calcule le volume d'un cylindre de diamètre d et de hauteur h.

Il y a donc 8 variables $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_5, x_{10}, x_{20}, x_{50}, x_{100}, x_{200})$ dans le système linéaire à résoudre. On écrit ce système sous la forme

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^\top = \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{M}$ est une matrice qui possède 8 colonnes et dont le nombre de lignes dépend des informations collectées par Alice.

Par exemple, pour indiquer que la masse totale est de 3.5 kg, on a l'équation :

$$2.30\, x_1 + 3.06\, x_2 + 3.92\, x_5 + 4.10\, x_{10} + 5.74\, x_{20} + 7.80\, x_{50} + 7.50\, x_{100} + 8.50\, x_{200} = 3500.$$

Ainsi, une ligne de la matrice $\boldsymbol{M}$ sera

$$\begin{pmatrix} 2.30 & 3.06 & 3.92 & 4.10 & 5.74 & 7.80 & 7.50 & 8.50 \end{pmatrix}$$

et la valeur de $\boldsymbol{b}$ associée est 3500.

Question 3.– Écrire complètement la matrice $\boldsymbol{M}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}$ du système linéaire à résoudre. Tester également si la matrice $\boldsymbol{M}$ peut être inversée.

Alice remarque maintenant qu'il n'y a aucune pièce de 1 euro dans le coffre.

Question 4.– Suite à cette dernière observation, ajouter une ligne au système linéaire, puis le résoudre. Trouvez-vous des solutions (presque) entières ?

Alice observe donc qu'elle doit accorder plus de précision à ses mesures physiques pour obtenir une solution entière au système. Elle refait donc des mesures et obtient :

— une masse totale de 3519.04 g,
— un volume total de 498540.67 mm^3,
— une épaisseur totale de 1360.45 mm.

Question 5.– Redéfinir le vecteur $\boldsymbol{b}$ avec ces valeurs, puis en déduire le nombre de pièces de chaque valeur, ainsi que la valeur totale du coffre.