Cryptographie à clef publique
Cours 3

Julien Lavauzelle

Université Paris 8

Master 1 mathématiques et applications – parcours ACC et CSSD

11/02/2022

Séance précédente

Vu à la **séance précédente** :

- Présentation d'un chiffrement à clef publique
- Types d'attaques : cassage total, cassage partiel, disctinction de l'aléa (IND)
- Modes d'attaques : chiffré seul, clair connu, clair choisi (CPA), chiffré choisi (CCA)
- Présentation de RSA
- Quelques cryptanalyses de RSA : factorisation de n, attaque de Wiener, attaque de Coppersmith
- En TD : Håstad et autres problèmes de sécurité sémantique.

Questions ?

Aujourd'hui

1. Sécurité sémantique pour RSA

2. D'autres systèmes à base de factorisation
   - Cryptosystème de Rabin
   - Cryptosystème de Goldwasser–Micali
   - Cryptosystème de Blum–Goldwasser

Plan

1. Sécurité sémantique pour RSA

2. D'autres systèmes à base de factorisation
   Cryptosystème de Rabin
   Cryptosystème de Goldwasser–Micali
   Cryptosystème de Blum–Goldwasser

Sécurité sémantique

Rappel. Dans le cours précédent, on a vu que pour une paire de clés RSA ($\texttt{pk} = (n, e), \texttt{sk} = d$) :

- si le clair m est trop petit, alors $m^e < n$ donc un attaquant peut retrouver m
- si les messages sont liés (exemple : m, $m+1$, $m+2$), alors on peut éventuellement retrouver m
- ...

Ces problèmes sont liés au fait que le chiffrement est **déterministe** : un même message chiffré deux fois, donne deux fois le même chiffré.

On voudrait obtenir (au moins) une **sécurité sémantique**, autrement dit, que le chiffré soit **indistinguable** d'un élément aléatoire.

Définition : problème d'indistinguabilité du chiffré (IND).

Instance. Une fonction de chiffrement $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, deux clairs x_1, x_2 et un chiffré $c = f(x_i)$ où $i \in \{1, 2\}$

Question. Déterminer i.

Une solution générique : OAEP

Définition : problème d'indistinguabilité du chiffré (IND).

Instance. Une fonction de chiffrement $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, deux clairs x_1, x_2 et un chiffré $c = f(x_i)$ où $i \in \{1, 2\}$

Question. Déterminer i.

Conséquence : On **doit** introduire de l'aléa pour rendre la fonction de chiffrement non-déterministe.

Une solution générique : OAEP (*Optimal asymmetric encryption padding*).

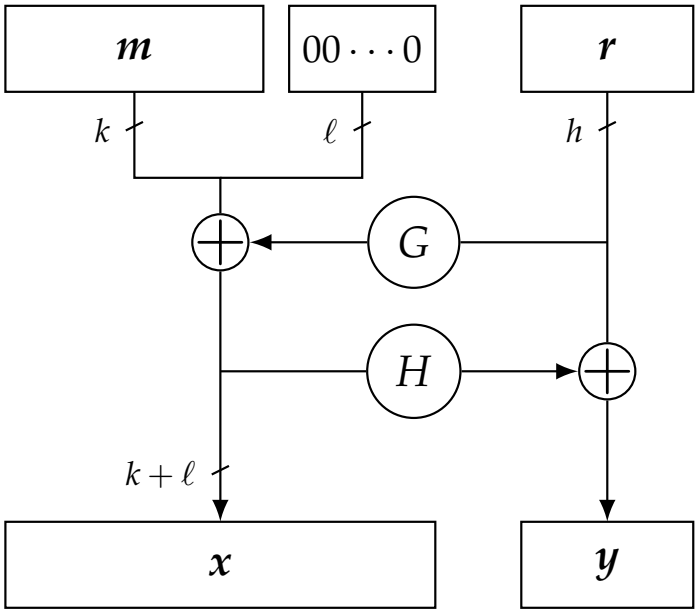
Optimal asymmetric encryption. M. Bellare and P. Rogaway. EUROCRYPT. **1994**.

Idée : ajouter un aléa au message et le hacher, pour le rendre « presque uniforme » dans l'espace des clairs.

OAEP : *Optimal asymmetric encryption padding*

Soit $\boldsymbol{m}$ un message à chiffrer, de taille k bits. On suppose que l'on dispose :

1. d'un **générateur d'aléa**, produisant des séquences aléatoires $\boldsymbol{r}$ (appelées **nonces**) de longueur h
2. de deux **fonctions de hachage** cryptographiques, qui sont **publiques** :
   - la fonction G, produisant des hachés de taille $k + \ell$,
   - la fonction H, produisant des hachés de taille h.



Le **nonce** $\boldsymbol{r}$ de longueur h est tiré aléatoirement.

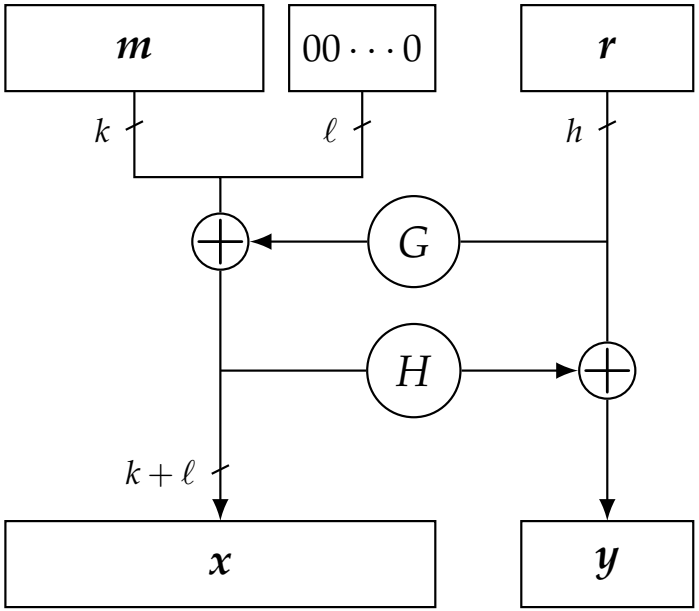
On a ensuite :

- $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{r}) \oplus (\boldsymbol{m} \,||\, \mathbf{0})$,
- $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r} \oplus H(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r} \oplus H(G(\boldsymbol{r}) \oplus (\boldsymbol{m} \,||\, \mathbf{0}))$.

La **sortie d'OAEP** est la concaténation $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \,||\, \boldsymbol{y}$.

Ensuite, on fournit $\boldsymbol{z}$ en entrée de l'algorithme de chiffrement (de RSA, par exemple).

Inversion d'OAEP



Le **nonce** r de longueur h est tiré aléatoirement.

On a ensuite :

- $x = G(r) + (m \,||\, \mathbf{0})$,
- $y = r + H(x) = r + H(G(r) + (m \,||\, \mathbf{0}))$.

La sortie est $z = x \,||\, y$.

Question. Comment retrouver m à partir de z ?

Solution.

1. on calcule $H(x)$
2. on retranche $H(x)$ à y pour retrouver r
3. on retranche $G(r)$ à x pour obtenir $(m \,||\, \mathbf{0})$, puis m.

Remarque. On appelle cette technique un **procédé de remplissange** (*padding*).

Remarque. OAEP s'inspire des réseaux de Feistel (voir cryptographie symétrique).

OAEP : sécurité

Propriété (énoncé informel). Pour h et ℓ suffisamment grands, si les fonctions G et H sont cryptographiquement sûres et si le générateur d'aléa a suffisamment d'entropie, la sortie z d'OAEP est indistinguable d'une séquence aléatoire.

Dans ce cas, combiné avec une fonction à sens unique (par exemple, la fonction RSA), le **schéma de chiffrement devient sémantiquement sûr (IND-CPA)**.

Remarque. On obtient également un mode de chiffrement *all-or-nothing* (« tout ou rien »), signifiant qu'en l'absence du chiffré entier, même Alice n'obtient pas d'information sur le clair.

Important. Il s'avère que OAEP fournit également une sécurité IND-CCA1 (attaque à chiffré choisi non-adaptative), mais il n'est pas encore prouvé qu'il fournit une sécurité IND-CCA2 (adaptative) pour n'importe quel schéma de chiffrement.

Pour **RSA**, c'est bien le cas. Voir par exemple :

Provable security for public key schemes. D. Pointcheval. Advanced Courses on Contemporary Cryptology. **2005**.

D'ailleurs, la seconde version du standard RSA PKCS#1 utilise OAEP.

Plan

1. Sécurité sémantique pour RSA

2. D'autres systèmes à base de factorisation
   Cryptosystème de Rabin
   Cryptosystème de Goldwasser–Micali
   Cryptosystème de Blum–Goldwasser

Plan

1. Sécurité sémantique pour RSA

2. D'autres systèmes à base de factorisation
   Cryptosystème de Rabin
   Cryptosystème de Goldwasser–Micali
   Cryptosystème de Blum–Goldwasser

Cryptosystème de Rabin

Proposé en 1979 par Michael Rabin (rappel : RSA en 1977).

Historiquement, premier système admettant une **réduction** vers le problème de la factorisation.

RABIN : GÉNÉRATION DE CLEFS

1. Choisir aléatoirement deux grands nombres premiers p et q.
2. Calculer $n = pq$.
3. La **clé publique** est n, la **clé privée** est (p, q).

RABIN : CHIFFREMENT

Pour **chiffrer** un message $m \in \{0, \ldots, n-1\}$:

1. Le **chiffré** est $c = m^2 \mod n$.

RABIN : DÉCHIFFREMENT

Pour **déchiffrer** c :

1. Calculer l'ensemble des racines carrées de c modulo n.
2. Retrouver m parmi ces racines carrées.

Déchiffrement : explications

Problème (extraction de racine carrée modulaire) : étant donnés p, q tel que $pq = n$, et $y = x^2 \mod n$, retrouver x

Pour calculer une **racine carrée modulo** $n = pq$, on utilise le théorème des restes chinois

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \simeq & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ y \mod n & \longleftrightarrow & (y \mod p,\ y \mod q) \end{array}$$

Puis, on trouve les racines carrées de y dans $\mathbb{F}_p$ (notons-les r_p et $-r_p$).

- Il existe des algorithmes efficaces pour cela (Tonelli–Shanks, Cipolla).
- Remarque : si $p \equiv 3 \mod 4$, il suffit de calculer $y^{(p+1)/4}$.

Idem dans $\mathbb{F}_q$ (les racines sont notées r_q et $-r_q$).

On calcule les coefficients de Bezout a_p et a_q associés à p et q :

$$a_p \cdot p + a_q \cdot q = 1\,.$$

Enfin, on reconstruit les quatre racines carrées : $\begin{cases} x_1 = a_p \cdot p \cdot r_q + a_q \cdot q \cdot r_p \\ x_2 = n - x_1 \\ x_3 = a_p \cdot p \cdot r_q - a_q \cdot q \cdot r_p \\ x_4 = n - x_3 \end{cases}$

Retouver le bon message parmi quatre

Question : comment retrouver **le** bon message parmi les quatre racines carrées ?

Solution 1. Ajouter une structure particulière au message.
Par exemple : $m \mapsto m \,||\, 00\ldots0$ (*padding*)
$\rightarrow$ avec grande probabilité, les autres racines n'auront pas cette forme.

Solution 2. Blum & Williams ont proposé

- de choisir p, q congrus à 3 modulo 4 (on dit que p, q sont des nombres premiers de Blum),
- de prendre comme espace de messages m le groupe des résidus quadratiques non-nuls modulo n, que l'on note $\mathrm{QR}_n^\times$.

Dans ce cas, la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{QR}_n^\times & \rightarrow & \mathrm{QR}_n^\times \\ & m & \mapsto & m^2 \mod n \end{array}$$

est bijective.

Preuve : en exercice.

Réduction de sécurité

Théorème. Si l'on dispose d'un algorithme A, d'entrées (c, n), qui retrouve le message m associé à un chiffré $c = m^2 \mod n$ en un temps polynomial, alors on peut factoriser n en un temps polynomial.

Preuve du théorème. En exercice.

Conséquence. Attaquer le cryptosystème de Rabin est aussi difficile que factoriser n.

Même s'il admet une réduction de sécurité pour sa fonction à sens unique, le cryptosystème de Rabin, vu comme tel, **n'est pas sémantiquement sûr**.
$\rightarrow$ lui appliquer OAEP

Plan

1. Sécurité sémantique pour RSA

2. D'autres systèmes à base de factorisation
   - Cryptosystème de Rabin
   - Cryptosystème de Goldwasser–Micali
   - Cryptosystème de Blum–Goldwasser

Goldwasser–Micali : présentation et génération de clefs

En 1982, Goldwasser et Micali proposent un système de chiffrement sémantiquement sûr.

Le schéma est **probabiliste** : des chiffrements successifs d'un même clair sont potentiellement différents $\implies$ facilite la preuve de sécurité IND-CPA.

GOLDWASSER–MICALI : GÉNÉRATION DE CLEFS

1. Choisir aléatoirement deux grands nombres premiers p et q.
2. Calculer $n = pq$.
3. Choisir $x \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $\left(\frac{x}{p}\right) = -1$ et $\left(\frac{x}{q}\right) = -1$ (x est un non-résidu modulo p et q).
4. La **clé publique** est (x, n), la **clé privée** est (p, q).

Exemple. Si $p \equiv 3 \mod 4$ et $q \equiv 3 \mod 4$, on peut choisir $x = n - 1$ (exercice : pourquoi ?)

Remarque. Si on souhaite un x aléatoire, on procède de la manière suivante :

- calculer a et b deux non-résidus quadratiques modulo p et q,
- avec les restes chinois, reconstruire $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $x \equiv a \mod p$ et $x \equiv b \mod q$.

Goldwasser–Micali : chiffrement et déchiffrement

GOLDWASSER–MICALI : CHIFFREMENT

On souhaite chiffrer un message $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \{0,1\}^k$ constitué de k bits.

1. Pour tout $i = 1, \ldots, k$:
   1.1 choisir aléatoirement $y_i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
   1.2 définir $c_i = y_i^2\, x^{m_i} \mod n$
2. Le chiffré est $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k$

GOLDWASSER–MICALI : DÉCHIFFREMENT

On souhaite déchiffrer $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k$.

1. Pour tout $i = 1, \ldots, k$:
   1.1 on calcule $a = c_i \mod p$.
   1.2 si a est un carré modulo p, on affecte $m_i = 0$
   1.3 sinon, on affecte $m_i = 1$
2. Le message déchiffré est $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$.

Validité du déchiffrement.

- Si $m_i = 0$, alors $c_i = y_i^2$ est un carré modulo n, donc modulo p (et modulo q).
- Sinon, $c_i = y_i^2 x$ n'est pas un carré modulo p. En effet, $\left(\frac{c_i}{p}\right) = 1 \times \left(\frac{x}{p}\right) = -1$.

Goldwasser–Micali : sécurité

Fait. On peut **réduire la sécurité** du chiffrement de Goldwasser et Micali au problème de la résiduosité quadratique.

Problème de résiduosité quadratique. Soit x tel que $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$. Déterminer si x est un résidu quadratique modulo n.

On appelle **pseudo-carré** un élément $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\left(\frac{x}{n}\right) = 1$ mais x n'est pas un carré modulo n.

Dans le système de Goldwasser–Micali, chaque bit c_i du chiffré est de la forme

$$c_i = y_i^2 x^{m_i} \mod n\,.$$

Alors,

- si $m_i = 0$, alors c_i est un résidu quadratique **aléatoire** modulo n
- si $m_i = 1$, alors c_i est un pseudo-carré **aléatoire** modulo n

Ainsi, c_i est une instance aléatoire du problème de résiduosité quadratique.

Problème majeur de Goldwasser–Micali : son **facteur d'expansion**.
$\rightarrow$ Pour un message de k bits, le chiffré est de taille $k \log_2 n$.

Plan

1. Sécurité sémantique pour RSA

2. D'autres systèmes à base de factorisation
   Cryptosystème de Rabin
   Cryptosystème de Goldwasser–Micali
   Cryptosystème de Blum–Goldwasser

Le cryptosystème de Blum–Goldwasser

En 1984, Blum et Goldwasser proposent le système de chiffrement suivant.

BLUM–GOLDWASSER : GÉNÉRATION DE CLEFS

1. Choisir aléatoirement deux grands nombres premiers p et q congrus à 3 modulo 4.
2. Calculer $n = pq$.
3. Calculer a et b les coefficients de Bezout de p et q, i.e.

$$ap + bq = 1$$

4. La **clé publique** est n, la **clé privée** est (a, b, p, q).

Le cryptosystème de Blum–Goldwasser

On note $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ et $h = \lfloor \log_2 k \rfloor$.

Remarque. On donne ici une version « accélérée » du cryptosystème de Blum–Goldwasser. Il en existe une version lente, avec $h = 1$.

BLUM–GOLDWASSER : CHIFFREMENT

Pour chiffrer un message $\boldsymbol{m}$:

1. Découper $\boldsymbol{m}$ en blocs $(m_1, \ldots, m_t)$ de h bits chacun.
2. Choisir aléatoirement $x_0 \in \mathrm{QR}_n^\times$
3. Pour tout $i = 1, \ldots, t$:
   - calculer $x_i = x_{i-1}^2 \mod n$,
   - extraire $p_i \in \{0,1\}^h$, les h bits de poids faible de x_i,
   - calculer $c_i = p_i \oplus m_i$.
4. Calculer $x_{t+1} = x_t^2 \mod n$.
5. Retourner $(c_1, \ldots, c_t, x_{t+1})$.

Remarque. L'idée est de réaliser un chiffrement de type « flot », où la suite chiffrante est générée par un générateur de Blum-Blum-Shub (BBS).

Le cryptosystème de Blum–Goldwasser

On rappelle que $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ et $h = \lfloor \log_2 k \rfloor$. La clé privée est (p, q, a, b) où $ap + bq = 1$.

BLUM–GOLDWASSER : DÉCHIFFREMENT

Pour déchiffrer un chiffré $(c_1, \ldots, c_t, x_{t+1})$:

1. Calculer $b_p = (\frac{p+1}{4})^{t+1} \mod (p-1)$ et $b_q = (\frac{q+1}{4})^{t+1} \mod (q-1)$.
2. Calculer $u_p = x_{t+1}^{b_p} \mod p$ et $u_q = x_{t+1}^{b_q} \mod q$.
3. Calculer $x_0 = apu_p + bqv_q \mod n$
4. Pour tout $i = 1, \ldots, t$:
   - calculer $x_i = x_{i-1}^2 \mod n$,
   - extraire $p_i \in \{0,1\}^h$, les h bits de poids faible de x_i,
   - calculer $m_i = p_i \oplus c_i$.
5. Retourner $\boldsymbol{m}$.

Validité. Il suffit de montrer que x_0 est bien calculé :

On a $x_{t+1}^{(p+1)/4} \equiv x_t^{(p+1)/2} \equiv x_t \mod p$.

Donc $x_{t+1}^{b_p} \equiv x_{t+1}^{((p+1)/4)^{t+1}} \equiv x_0 \mod p$.

De même, $x_{t+1}^{b_q} \equiv x_0 \mod q$, et les restes chinois donnent le résultat.

Exemple pour Blum–Goldwasser

Exemple tiré de

Handbook of Applied Cryptography. A. Menezes, P. van Oorschot and S. Vanstone. CRC Press. **1996**.

Paramètres : $p = 499, q = 547 \implies n = 272953$

On trouve $a = -57$ et $b = 52$ tels que $ap + bq = 1$.

On a $k = \lfloor \log_2 n \rfloor = 18$ et $h = \lfloor \log_2 k \rfloor = 4$. Soit le message à chiffrer

$$\boldsymbol{m} = 1001|1100|0001|0000|1100$$

CHIFFREMENT, avec $\texttt{pk} = n$:
On choisit aléatoirement $x_0 = 159201 \mod n$.
On calcule alors

i	$x_i = x_{i-1}^2 \mod n$	p_i	$c_i = p_i \oplus m_i$
1	180539	1011	0010
2	193932	1100	0000
3	245613	1101	1100
4	130286	1110	1110
5	40632	1000	0100

et on obtient $x_6 = x_5^2 \mod n = 139680$.
Le chiffré est donc

$$((0010|0000|1100|1110|0100),\ 139680)$$

DÉCHIFFREMENT, avec $\texttt{sk} = (a, b, p, q)$:
Pour déchiffrer, on calcule

$$b_p = ((p+1)/4)^6 \mod (p-1) = 463$$
$$b_q = ((q+1)/4)^6 \mod (q-1) = 337$$
$$u_p = x_6^{463} \mod p = 20$$
$$u_q = x_6^{337} \mod q = 24$$
$$x_0 = apu_p + bqv_q \mod n = 159201$$

puis on déchiffre comme dans le tableau.

Sécurité et performance

La **sécurité** du cryptosystème se réduit à celle du générateur de pseudo-aléa BBS.

Proposition. Le schéma de chiffrement de Blum–Goldwasser est sûr sémantiquement (IND-CPA), mais vulnérable à des attaques à chiffré choisi.

Par rapport à Goldwasser–Micali, l'**expansion** du cryptosystème de Blum–Goldwasser est réduite : le chiffré contient « seulement » $\log(n)$ bits **supplémentaires** par rapport au clair.

Efficacité. D'un point de vue calculatoire, les temps de chiffrement et de déchiffrement sont comparables à RSA (à un petit facteur constant près).

Fin de la séance

Questions ?