Université Paris 8 Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information
Interrogation finale

16/12/2021

Aucun document et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé.

Les **justifications** et le **soin** apportés aux réponses seront évalués.

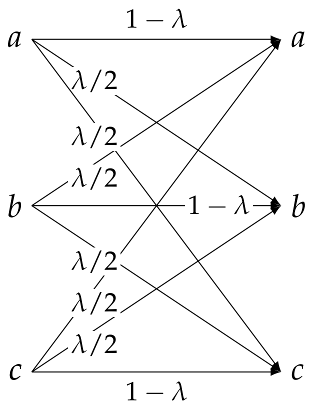
Durée : 2h15

Barème informatif : ex. 1 : 6 points / ex. 2 : 6 points / ex. 3 : 8 points

---

Exercice 1. Canal ternaire.

On considère un canal ternaire, c'est-à-dire dont l'entrée X et la sortie Y sont définies sur un alphabet $\{a, b, c\}$ de cardinal 3. Le canal a le diagramme de transition suivant :



Autrement dit, on a :

$$\mathbb{P}(Y = x \,|\, X = x) = 1 - \lambda, \quad \forall x \in \{a, b, c\}$$

et

$$\mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x) = \lambda/2, \quad \forall (x,y) \in \{a, b, c\}^2 \text{ tels que } x \neq y\,.$$

On rappelle que $h(t) := -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t)$ est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– Démontrer que, pour tout $x \in \{a, b, c\}$, on a $H(Y \mid X = x) = h(\lambda) + \lambda$. En déduire la valeur de $H(Y \,|\, X)$.

Question 3.– Quelle est la valeur maximale que peut atteindre $H(Y)$? Avec quelle source X cette valeur est-elle atteinte ?

Question 4.– Démontrer que la capacité du canal est :

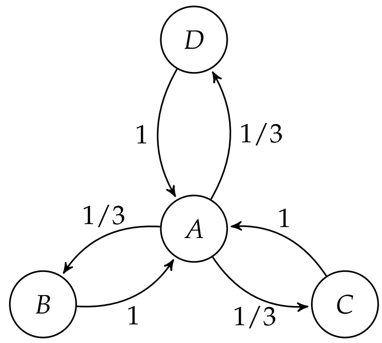
$$C(\lambda) = \log_2(3) - h(\lambda) - \lambda\,.$$

Question 5.– Calculer et intérpréter la capacité du canal lorsque $\lambda = 2/3$.

Question 6.– Calculer et intérpréter la capacité du canal lorsque $\lambda = 0$.

Exercice 2. Marche aléatoire sur le graphe étoilé.

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant :



Les arêtes sortantes d'un sommet $V \in \{A, B, C, D\}$ sont étiquetées par la probabilité de transition de V vers le sommet suivant de la marche. Par exemple, la probabilité du déplacement de A vers B est de $1/3$, tandis que celle de B vers A est égale à 1.

On note X_n la position (sommet A, B, C ou D) à l'instant n de la marche aléatoire, et on considère le processus stochastique $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 1.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il homogène ? Justifier rapidement.

Question 2.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 3.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 4.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, déterminer son taux d'entropie.

Question 5.– Dans le cas où X_0 est déterministe égale à A, calculer la loi de X_{2n} et la loi de X_{2n+1}.

Exercice 3. Questions diverses.

Question 1.– Donner la transformée de Burrows–Wheeler du mot suivant :

`ACACIA`

Question 2.– On considère le code de Liv–Zempel sur un alphabet $\mathcal{X}$ à 4 symboles. Quelle est la longueur minimale, en nombre de bits, de l'encodage d'un mot ayant n symboles de $\mathcal{X}$? Justifiez votre réponse.

Question 3.– On considère une source X sur $\{a, b, c, d, e\}$ de loi suivante :

x	a	b	c	d	e
$p_X(x)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/16$

Quelle est la plus petite longueur moyenne d'un code uniquement décodable sur X ? Justifier.

Question 4.– Le code $\{1, 101\}$ est-il uniquement décodable ? Justifier.

Question 5.– Quelle est la longueur moyenne du code de Shannon–Fano sur une source X dont la distribution de probablité est :

$$p_X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right) \ ?$$

Question 6.– Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On note Y la variable aléatoire représentant le signe (positif ou négatif) de X.

1. Pourquoi a-t-on $H(Y) \leq 1$?
2. En déduire que $I(X\,;X^2) \geq H(X) - 1$.