Université Paris 8 — Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information
Interrogation à mi-parcours

18/11/2021

Aucun document et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé.

Les **justifications** et le **soin** apportés aux réponses seront évalués.

Durée : 1h30.

Exercice 1. Questions autour de l'entropie (4 points).

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux, en apportant une justification de quelques lignes.

Question 1.– On a toujours $H(X) = H(2X)$.

Question 2.– On a toujours $H(X) = H(X^2)$.

Question 3.– Si X prend 8 valeurs distinctes et est uniforme, alors $H(X) = 3$.

Question 4.– Si $H(X) = 3$, alors X prend 8 valeurs distinctes et est uniforme.

Exercice 2. Codes de Shannon–Fano et de Huffman (5 points).

Question 1.– Dans un cadre général on considère une source X, et on note C_{SF} son code de Shannon–Fano et C_H son code de Huffman. Rappeler (sans le démontrer) comment se comparent les 3 valeurs suivantes :

- l'entropie $H(X)$ de la source,
- la longueur moyenne $\overline{\ell}(C_{SF})$ du code de Shannon–Fano,
- la longueur moyenne $\overline{\ell}(C_H)$ du code de Huffman.

On passe maintenant à un cas particulier. Dans les deux questions suivantes, on pourra s'aider de la table de logarithmes en base 2 :

x	1	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\log_2(x)$	0	-1	-2	-3	-4

On considère X une source de distribution :

$$p_X = (0.09, 0.10, 0.11, 0.15, 0.25, 0.30)\,.$$

Question 2.– Donner un code de Huffman associé à la source X.

Question 3.– Donner un code de Shannon–Fano associé à la source X.

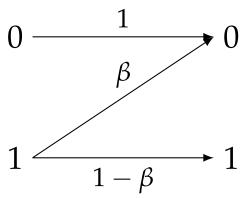
Exercice 3. Codes uniquement décodables (2 points).

Question 1.– Les codes binaires suivants sont-ils uniquement décodables ? Justifier.

1. $(10, 11, 0101, 0000)$,
2. $(1, 110, 01, 010, 00000)$.

Exercice 4. Un canal (10 points).

Dans cet exercice, on se propose de calculer la capacité d'un canal de transmission. Ce canal est binaire (l'entrée et la sortie ont taille 2), et peut être défini par le diagramme suivant.



On note X et Y les variables aléatoires, toutes deux définies sur $\{0,1\}$, associées à l'entrée (X) et à la sortie (Y) du canal. On note $\alpha := p(X = 0)$. On rappelle enfin que

$$h(t) := t \log_2 \left(\frac{1}{t}\right) + (1-t) \log_2 \left(\frac{1}{1-t}\right)$$

est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition $\boldsymbol{M}$ du canal.

Question 2.– Calculer $H(Y \,|\, X = 0)$. Interpréter le résultat.

Question 3.– Montrer que $H(Y \,|\, X) = (1-\alpha)h(\beta)$.

Question 4.– Calculer $H(Y)$ puis $I(X\,;Y)$.

Question 5.– Calculer la capacité du canal pour $\beta = 0$, puis interpréter le résultat.

Question 6.– Calculer la capacité du canal pour $\beta = 1$, puis interpréter le résultat.

Question 7.– [difficile, 3pts] Pour $\beta \in]0,1[$ fixé, on pose $f_\beta(x) := h((1-\beta)(1-x)) - (1-x)h(\beta)$ et on note

$$\mu(\beta) := 1 - \frac{1}{(1-\beta)(1 + 2^{h(\beta)/(1-\beta)})}\,.$$

Démontrer que le minimum de f_β sur $[0,1]$ est atteint en $x = \mu(\beta)$. En déduire la capacité du canal dans le cas général.