Université Paris 8 Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information – Exercices complémentaires

04/11/2021

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/∼lavauzelle/teaching/2021-22/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Grandeurs en théorie de l'information

Exercice 1. ($\star$) Applications numériques.

On considère deux variables aléatoires X et Y, et on donne la distribution de la loi conjointe de (X, Y) :

	x_0	x_1	x_2
y_0	1/8	1/4	0
y_1	0	1/2	1/8

Question 1.– Calculer $H(X, Y)$.

Question 2.– Calculer $H(X)$ et $H(Y)$.

Question 3.– Calculer $I(X\,;Y)$.

Exercice 2. ($\star\star$) Mélange de cartes.

Un jeu de cartes standard est constitué de 52 cartes. On note $\mathcal{X} = \{1, \dots, 52\}$ l'ensemble de ces cartes. On définit également $\mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$ comme l'ensemble de toutes les permutations sur $\mathcal{X}$. Informellement, une permutation sur $\mathcal{X}$ correspond à un mélange des cartes.

Étant donnée une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$, on peut alors définir la variable aléatoire $\sigma(X) : \Omega \to \mathcal{X}$ comme

$$\sigma(X) := \sigma \circ X$$

Question 1.– Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$ fixé. Démontrer que $H(\sigma(X)) = H(X)$.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$. On définit la variable $Y := U(X) : \Omega \to \mathcal{X}$ par

$$Y(\omega) := U(\omega)(X(\omega))\,.$$

Question 2.– Démontrer que Y est uniforme sur $\mathcal{X}$. En déduire que $H(Y) \geq H(X)$. Interpréter ce résultat.

Soit V une variable de loi non-uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$, c'est-à-dire qu'il existe deux permutations $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$ tels que $p(\sigma) \neq p(\sigma')$.

Question 3.– Décrire une variable X telle que $Z := V(X)$ satisfait $H(Z) < H(X)$.

Exercice 3. ($\star\star$) Questions autour de l'entropie.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Question 1.– Démontrer que $I(X^3\,;X) = H(X)$.

Question 2.– Démontrer que $H(X\,|\,X^2) \leq 1$ et donner un cas d'égalité.

Codage de source

Exercice 4. ($\star$) Codes préfixes et uniquement décodables.

Parmi les codes suivants, lesquels sont préfixes ? Lesquels sont uniquement décodables ?

1. $\{1, 10, 100\}$
2. $\{0, 01, 001\}$
3. $\{000, 001, 100, 111, 01\}$
4. $\{000, 001, 100, 111, 10\}$
5. $\{101, 010, 0\}$

Exercice 5. ($\star\star$) Code de Huffman d'une source particulière.

Question 1.– On considère une source suivant une loi dont la distribution est :

$$(0.30, 0.27, 0.23, 0.20)\,.$$

Donner le codage de Huffman correspondant.

Soit maintenant X une source de distribution $p_1 \geq \cdots \geq p_m$ avec $m = 2^k$. On suppose que

$$p_{m-1} + p_m \geq p_1\,.$$

Question 2.– Après $m/2$ étapes de l'algorithme de Huffman, quelle est la distribution « temporaire » obtenue ?

Question 3.– Démontrer que $p_m + p_{m-1} + p_{m-2} + p_{m-3} \geq p_1 + p_2$. En déduire la distribution « temporaire » obtenue après $3m/4$ étapes de l'algorithme de Huffman.

Question 4.– Conclure sur la forme de l'arbre binaire retourné par l'algorithme de Huffman. Quelle est la longueur moyenne du code associé ?

Exercice 6. ($\star\star$) Code de Huffman et suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 1}$ est donnée par :

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 3\,.$$

Par exemple, on a $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et $F_9 = 34$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

Pour $n \geq 2$ fixé, on considère une source $X^{(n)}$ définie sur l'alphabet $\{x_1, \dots, x_n\}$, et telle que

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{F_i}{S_n} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

Question 1.– Donner la distribution de probabilité de la source pour $n = 6$.

Question 2.– Construire l'arbre binaire du code de Huffman associé à la source $X^{(6)}$.

On souhaite maintenant étudier la forme de l'arbre de Huffman pour $n \geq 2$ quelconque.

Question 3.– Démontrer que $S_n = F_{n+2} - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Question 4.– En déduire la forme de l'arbre de Huffman associé. Le résultat devra être démontré formellement.

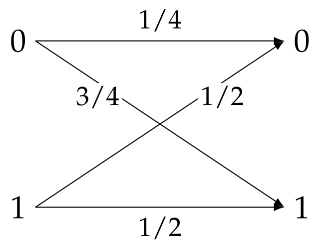
Question 5.– **[Plus difficile]** Démontrer qu'asymptotiquement, la longueur moyenne du code de Huffman de source $X^{(n)}$ est finie. On pourra s'aider (sans les démontrer) des formules ci-dessous, valables pour tout $n \geq 1$:

$$\phi^{n-2} \leq F_n \leq \phi^{n-1} \text{ où } \phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} i x^i = \frac{x}{(x-1)^2}\Big((n-1)x^n - nx^{n-1} + 1\Big)\,.$$

Codage de canal

Exercice 7. ($\star$) Calcul numérique de capacité.

On considère un canal binaire dont le diagramme de transition est le suivant :



On note X l'entrée du canal et Y sa sortie.

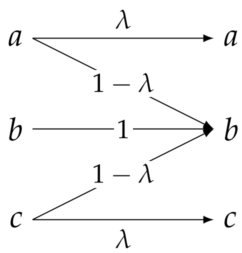
Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– On note $\alpha = \mathbb{P}(X = 0)$. Calculer $H(Y)$ et $H(Y \mid X)$ en fonction de α.

Question 3.– En déduire la capacité du canal.

Exercice 8. ($\star\star$) Capacité d'un canal.

On considère le canal représenté par le diagramme suivant. L'entrée (représentée par la variable X) et la sortie (représentée par la variable Y) sont définies sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.



Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– On note $x := 1 - \mathbb{P}(X = b) = \mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(X = c)$. Démontrer que

$$H(Y \mid X) = x\,h(\lambda)$$

où $h(\lambda) = \lambda \log_2 \frac{1}{\lambda} + (1-\lambda) \log_2 \frac{1}{1-\lambda}$ est l'entropie binaire.

Question 3.– On note $y := \frac{\mathbb{P}(X=a)}{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=c)}$ de sorte que $\mathbb{P}(X = a) = xy$. Démontrer que

$$H(Y) = x\lambda h(y) + h(x\lambda)\,.$$

Question 4.– En déduire que l'information mutuelle entre X et Y s'exprime comme

$$I(X\,;Y) = x\lambda h(y) + h(x\lambda) - xh(\lambda)\,.$$

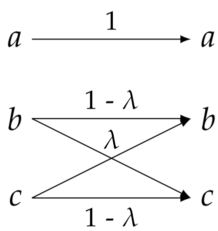
Question 5.– Dans cette question uniquement, on suppose que $\lambda = 0$. Que vaut la capacité du canal dans ce cas ? Interpréter le résultat.

Question 6.– Dans cette question uniquement, on suppose que $\lambda = 1$. Que vaut la capacité du canal dans ce cas ? Interpréter le résultat.

Question 7.– **[plus difficile]** Dans cette question, le paramètre λ est de nouveau un réel quelconque dans $[0,1]$. Pour quelle valeur de y l'information mutuelle est-elle maximale ? En déduire la capacité du canal.

Exercice 9. ($\star\star$) Capacité d'un canal.

On considère le canal représenté par le diagramme suivant. L'entrée (représentée par la variable X) et la sortie (représentée par la variable Y) sont définies sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.



Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– On note $x := \mathbb{P}(X = a)$. Démontrer que

$$H(Y \mid X) = (1 - x)\, h(\lambda)$$

où $h(\lambda) = \lambda \log_2 \frac{1}{\lambda} + (1 - \lambda) \log_2 \frac{1}{1-\lambda}$ est l'entropie binaire.

Question 3.– On note $y := \frac{\mathbb{P}(X=b)}{\mathbb{P}(X=b)+\mathbb{P}(X=c)}$. Démontrer que

$$H(Y) = h(x) + (1 - x)\, h((1 - \lambda)y + \lambda(1 - y))\,.$$

Question 4.– En déduire que l'information mutuelle entre X et Y s'exprime comme

$$I(X\,;Y) = h(x) + (1 - x) f(y)\,.$$

où $f(y) := h((1 - \lambda)y + \lambda(1 - y)) - h(\lambda)$.

Question 5.– Dans cette question uniquement, on suppose que $\lambda = \frac{1}{2}$. Que vaut la capacité du canal dans ce cas ? Interpréter.

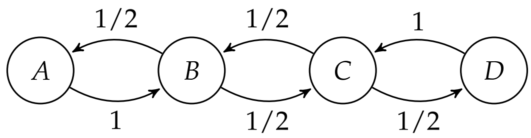
Question 6.– Dans cette question uniquement, on suppose que $\lambda = 0$. Que vaut la capacité du canal dans ce cas ? Interpréter.

Question 7.– **[plus difficile]** Dans cette question, le paramètre λ est de nouveau un réel quelconque dans $[0,1]$. Pour quelle valeur de y l'information mutuelle est-elle maximale ? En déduire la capacité du canal.

Processus stochastiques

Exercice 10. ($\star$) Marche aléatoire sur le graphe chaîne de taille 4.

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant :



Les arêtes sortantes d'un sommet $V \in \{A, B, C, D\}$ sont étiquetées par la probabilité de transition de V vers le sommet cible. Par exemple, la probabilité de B vers A est $1/2$.

On note X_n la position (sommet A, B, C ou D) à l'instant n, et on considère le processus stochastique $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Question 1.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il homogène ? Justifier rapidement.

Question 2.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

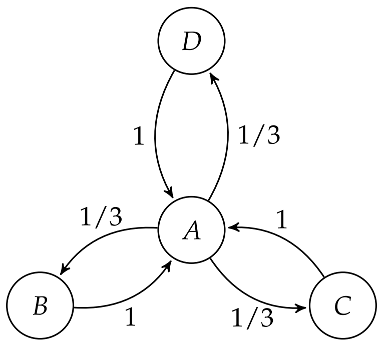
Question 3.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 4.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, déterminer son taux d'entropie.

Question 5.– Dans le cas où X_0 est déterministe égale à A, calculer la loi de X_{2n} et la loi de X_{2n+1}.

Exercice 11. ($\star$) Marche aléatoire sur le graphe étoilé.

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant :



Les arêtes sortantes d'un sommet $V \in \{A, B, C, D\}$ sont étiquetées par la probabilité de transition de V vers le sommet cible. Par exemple, la probabilité de A vers B est $1/3$.

On note X_n la position (sommet A, B, C ou D) à l'instant n, et on considère le processus stochastique $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Question 1.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il homogène ? Justifier rapidement.

Question 2.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 3.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 4.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, déterminer son taux d'entropie.

Question 5.– Dans le cas où X_0 est déterministe égale à A, calculer la loi de X_{2n} et la loi de X_{2n+1}.

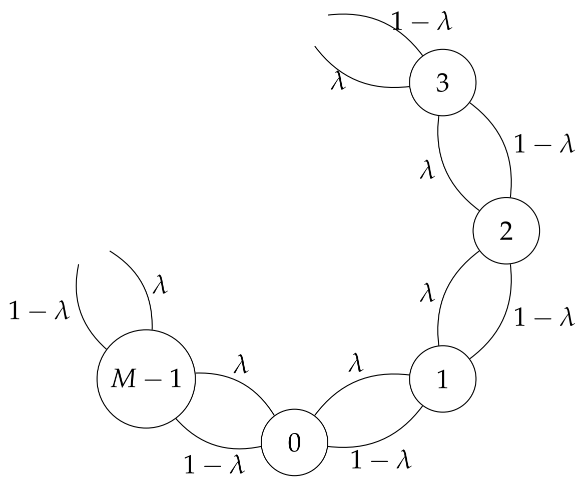
Exercice 12. Marche aléatoire sur un cycle.

On s'intéresse ici au processus stochastique donné une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ pour un entier fixé $M \geq 3$. La position initiale X_0 de la marche est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. Puis, chaque nouvelle position X_n est tirée en fonction de la précédente d'après la règle suivante :

$$X_n = X_{n-1} + (-1)^{B_n} \mod M$$

où la valeur de B_n est tirée selon une loi de Bernoulli de paramètre λ.

Autrement dit, la marche aléatoire peut être représentée par le diagramme suivant :



Attention. L'exercice est composé de deux parties, dans lesquelles diffèrent les hypothèses sur les données du problème.

— Partie 1 —

Dans cette partie de l'exercice, on suppose que la variable X_0 est uniforme sur $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$.

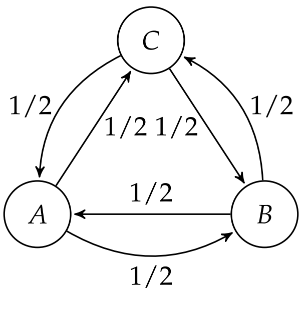
Question 1.– Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_n pour tout $n \geq 0$.

Question 2.– Le processus stochastique $\boldsymbol{X} = \{X_n\}_{n\geq 0}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il stationnaire ?

Question 3.– Déterminer $H(X_1 \mid X_0)$. En déduire le taux d'entropie du processus $\boldsymbol{X}$.

— Partie 2 —

Dans cette partie de l'exercice, on ne suppose plus que X_0 est uniforme. En revanche, on fixe $\lambda = 1/2$ et $M = 3$. Autrement dit, le diagramme définissant la marche aléatoire est :



Question 4.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 5.– Calculer explicitement $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^2$ et $\boldsymbol{P}^3$.

Question 6.– Démontrer que la matrice $\boldsymbol{P}$ est diagonalisable.

Question 7.– Donner la forme de $\boldsymbol{P}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra plus simplement écrire la matrice $\boldsymbol{P}^n$ comme un produit de trois matrices que l'on explicitera.

Question 8.– Démontrer que pour toute distribution initiale X_0, la distribution X_n tend terme à terme vers la distribution uniforme $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, lorsque $n \to \infty$.